Mathematics

MAY 4 - 1932

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 166

Heft 4

Ausgegeben den 4. April 1932

Q 13

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1932

Band 166. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Scholz, Arnold, Über die Beziehung der Klassenzahlen quadratischer Körper zueinander	201
Gagaeff, B., Über Sturm-Liouvillesche Reihen mit Lücken	204
Obreschkoff, Nikola, Über einige Verallgemeinerungen der Borelschen Summierung der divergenten Reihen	208
Ullrich, Egon, Über eine Anwendung des Verzerrungssatzes auf meromorphe Funktionen	220
Wellstein, Julius, Vandermondesche Determinanten, Partialbruchzerlegung, Interpolationsaufgabe von Lagrange-Hermite	235
Brauer, Richard, Über die algebraische Struktur von Schiefkörpern	241

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Über die Beziehung der Klassenzahlen quadratischer Körper zueinander.

Von *Arnold Scholz* in Freiburg.

Über die ungeraden Klassenzahlfaktoren quadratischer Zahlkörper weiß man noch sehr wenig. Es scheint auch so, als ob aus einer Verwandtschaft von Körpern, die sich am deutlichsten in ihrer Diskriminante ausdrückt, kaum eine Beziehung für ihre Klassenzahlen oder Klassengruppen hergeleitet werden kann. Man könnte z. B. meinen, wenn man die Klassengruppe zweier Körper $\mathsf{P}(\sqrt{a})$ und $\mathsf{P}(\sqrt{b})$ kennt, müsse man schon irgendwelche Aussagen über den im Kompositum $\mathsf{P}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ enthaltenen Körper $\mathsf{P}(\sqrt{ab})$ machen können, die sich nicht bloß auf die Anzahl der Geschlechter beziehen. Wenn man aber die Klassenzahltabellen vergleicht, so wird man kaum irgendwo einen Zusammenhang für die ungeraden Klassenzahlfaktoren dreier abhängiger quadratischer Körper $\mathsf{P}(\sqrt{a})$, $\mathsf{P}(\sqrt{b})$, $\mathsf{P}(\sqrt{c})$; $abc = e^2$ finden. Und von der Klassengruppe des Produktkörpers $\mathsf{P}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ weiß man auch, daß sich die 'ungerade' Klassengruppe dieses Körpers aus denen der Körper $\mathsf{P}(\sqrt{a})$, $\mathsf{P}(\sqrt{b})$, $\mathsf{P}(\sqrt{c})$ direkt zusammensetzt [1]). Danach sieht es eher so aus, als ob die ungeraden Klassengruppen der drei quadratischen Körper nichts miteinander zu tun haben. Man darf wohl *Vermutungen* von folgender Art aussprechen:

Besteht überhaupt für die Teilbarkeit der Klassenzahl quadratischer Körper durch eine ungerade Primzahl p eine bestimmte Dichte, so bestimmen sich für die Tripel abhängiger quadratischer Körper die Dichten für Teilbarkeit und Nichtteilbarkeit multiplikativ aus den Einzeldichten.

Dabei sind die Körper nach der absoluten Diskriminante bezw. dem Diskriminantenprodukt geordnet gedacht.

Oder noch schärfer: Hält man *einen* Körper $\mathsf{P}(\sqrt{\delta})$ fest, so bekommt man eine Gruppierung der übrigen quadratischen Körper zu Paaren $\mathsf{P}(\sqrt{\partial})$, $\mathsf{P}(\sqrt{\delta\partial})$. Dann wird man i. allg. auch keine Beziehung zwischen ihren ungeraden Klassengruppen finden.

Einen Fall gibt es jedoch, wo man eine Beziehung feststellen kann. Nehmen wir als den einen der drei Körper stets den Körper $\mathsf{P}(\sqrt{-3})$ und vergleichen die Klassengruppen der Körper $\mathsf{P}(\sqrt{\partial})$ und $\mathsf{P}(\sqrt{-3\partial})$, so besteht für die Dreierfaktoren dieser beiden Klassengruppen folgende Beziehung:

Satz: *Hat von den beiden Körpern* $\mathsf{P}(\sqrt{\partial})$ *und* $\mathsf{P}(\sqrt{-3\partial})$ *die Klassengruppe des imaginären Körpers r Basisklassen und die des reellen Körpers s Basisklassen von Dreierpotenzordnung* (*also* $3^r - 1$ *bezw.* $3^s - 1$ *Idealklassen der Ordnung* 3), *so gilt*:

$$s \leqq r \leqq s + 1.$$

[1]) Vgl. die Darstellung bei F. Pollaczek auf S. 534—535 der Abhandlung „Über die Einheiten relativ-abelscher Zahlkörper, Math. Zeitschr. **30** (1929), die auch für $l = 2$ gültig ist.

Hat z. B. der imaginäre Körper $\mathsf{P}(\sqrt{-\Delta})$ eine durch 3 nicht teilbare Klassenzahl, so auch der reelle Körper $\mathsf{P}(\sqrt{3\Delta})$. Hat $\mathsf{P}(\sqrt{-\Delta})$ eine in bezug auf 3 zyklische Klassengruppe ($r = 1$), so $\mathsf{P}(\sqrt{3\Delta})$ entweder auch ($s = 1$), oder seine Klassenzahl ist überhaupt nicht durch 3 teilbar ($s = 0$) usf. Welche der beiden Diskriminanten die durch 3 teilbare ist, spielt dabei keine Rolle. Ob $s = r$ oder $s = r - 1$, entscheidet sich auf andere Weise.

Wir schreiten jetzt zum Beweis mit den zuletzt gewählten Bezeichnungen, setzen außerdem $\mathsf{P}(\sqrt{-\Delta}) = K$, $\mathsf{P}(\sqrt{3\Delta}) = C$. Aus der direkten Anwendung der Klassenkörpertheorie auf kubische Zahlkörper [2]) wissen wir, daß gerade r voneinander unabhängige [3]) kubische (nicht-galoissche) Zahlkörper mit der Diskriminante $-\Delta$ existieren, die, mit $\mathsf{P}(\sqrt{-\Delta})$ komponiert, absolute Klassenkörper über $\mathsf{P}(\sqrt{-\Delta})$ sind. Diese r Körper werden erzeugt durch Zahlen der Gestalt

$$\vartheta_\varrho = \sqrt[3]{a_\varrho + b_\varrho\sqrt{3\Delta}} + \sqrt[3]{a_\varrho - b_\varrho\sqrt{3\Delta}} = \vartheta'_\varrho + \vartheta''_\varrho = \sqrt[3]{\alpha'_\varrho} + \sqrt[3]{\alpha''_\varrho} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r).$$

$K(\vartheta_\varrho)$ ist also Klassenkörper, und, wenn man noch $\sqrt{-3}$ adjungiert, ist auch $CK(\vartheta_\varrho) = CK(\vartheta'_\varrho)$ Klassenkörper über $K(\sqrt{-3}) = CK$. ϑ_ϱ kann man hier durch ϑ'_ϱ ersetzen; denn da $\alpha'_\varrho \cdot \alpha''_\varrho$ dritte Potenz einer Zahl ist (nämlich der Zahl $\frac{p}{3}$, wenn ϑ_ϱ der Gleichung $x^3 - px - q = 0$ genügt), so erhält man denselben zyklischen Körper über CK durch Adjunktion von $\sqrt[3]{\alpha'_\varrho}$, $\sqrt[3]{\alpha''_\varrho}$ oder $\sqrt[3]{\alpha'_\varrho} + \sqrt[3]{\alpha''_\varrho}$. Aus der Klassenkörpereigenschaft von $CK(\vartheta'_\varrho)$ folgt dann, daß α'_ϱ in CK eine singuläre Primärzahl für den Exponenten 3 sein muß, d. h. eine dritte Idealpotenz, außerdem kubischer Rest mod $3^{3/2}$, und dies ist auch eine hinreichende Bedingung dafür, daß $CK(\vartheta'_\varrho)$ absoluter Klassenkörper ist [4]). Nun ist aber α'_ϱ eine Zahl aus C. Also muß sie auch in C schon Idealkubus sein, wenn sie in CK Idealkubus ist; denn CK ist nur vom Grade 2 über C.

Jeder Idealgruppe in K vom Index 3 entspricht also ein Idealkubus α'_ϱ in C, dessen Kubikwurzel den zugehörigen Klassenkörper auf CK aufsetzt. Dabei müssen $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_r$ in bezug auf dritte Zahlpotenzen aus CK, oder, was wieder aus Gradgründen auf dasselbe hinausläuft, aus C voneinander unabhängig sein, also $\Pi\alpha'^{a_\varrho}_\varrho = \gamma^3$ (γ in C) dann und nur dann, wenn alle $a_\varrho \equiv 0\,(3)$; denn ihre Kubikwurzeln ϑ'_ϱ erzeugen ja über CK r voneinander unabhängige kubische Körper.

Bezeichnet nun in einem beliebigen Zahlkörper
Z die Zahlgruppe aller Idealkuben, Z_3 die der Zahlkuben,
J die Idealklassengruppe, J_3 die der Idealklassenkuben,
E die Einheitengruppe, E_3 die der Einheitenkuben
und
$[A : B]$ allgemein die Ordnung der Faktorgruppe A/B,
so gilt:

$$[Z : Z_3] = [J : J_3] \cdot [E : E_3].$$

In unserem Körper C ist also $[Z : Z_3] = 3^{s+1}$. Andererseits $\geqq 3^r$, da ja die

---

[2]) Vgl. H. Hasse: Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage, Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 565—582; § 4.

[3]) Körper heißen voneinander unabhängig, wenn sich bei ihrer Komposition die Gradzahlen multiplizieren.

[4]) Siehe etwa Ph. Furtwängler: Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers, Math. Ann. **63** (1907), S. 1—37.

$\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_r'$ ein unabhängiges Teil-Repräsentantensystem für die Faktorgruppe Z/Z_3 bilden. Also hat man:

$$r \leqq s + 1.$$

Jetzt wendet man dieselbe Überlegung auf C und K mit vertauschten Rollen an, wobei zu beachten ist, daß die in C noch zyklische Einheitengruppe bei K fortfällt, weswegen in K einfach $[Z : Z_3] = 3^r$. Andererseits $\geqq 3^s$, weil der Idealklassenreichtum von C sich entsprechend auf K auswirkt, wie oben der von K auf C. Also hat man hier:

$$s \leqq r.$$

Damit ist der angekündigte Satz bewiesen. Wir brauchten dabei von der entscheidenden Eigenschaft der singulären Primärzahl in CK nur die Teileigenschaft des Idealkubus heranzuziehen, um obige Abschätzungen zu gewinnen. Wollen wir nun noch näher wissen, wann $r = s$, wann $r = s + 1$ ist, müssen wir noch die andere Teileigenschaft der „Primärzahl" (kubischer Rest mod $3^{3/2}$) heranziehen. Für diese ist der Spielraum von vornherein schon sehr eng durch die Relation $s \leqq r \leqq s + 1$. Stellt man nämlich die unabhängigen Idealkuben aus K und C zu einem System

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_r; \quad \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_s, \quad \varepsilon$$

zusammen, wobei ε die Fundamentaleinheit aus C bedeute, so finden ja (bei passender Basiswahl) schon alle bis auf eine der $r + s + 1$ Größen Verwendung zur Bildung der absoluten Klassenkörper von C und K. Entweder sind die $\varrho_1, \ldots \varrho_r$ alle primär ($r = s$), oder die $\sigma_1, \ldots \sigma_s, \varepsilon$ ($r = s + 1$). Die bei C oder K übrigbleibende Größe τ ist in CK nicht primär: Einmal ist sie auch in CK von den übrigen Größen unabhängig in bezug auf Zahlkuben; denn nach dem oben erwähnten Satz (Anm. 1) setzen sich die Dreier-Idealklassen aus K und C direkt zusammen; es kann daher keine „kubische Relation" zwischen den $r + s + 1$ Größen bestehen. $CK(\sqrt[3]{\tau})$ ist daher kein absoluter Klassenkörper mehr, sondern Klassenkörper mit einem Führer $\mathfrak{f} \neq 1$; da aber τ Idealkubus ist, gilt $1 \neq \mathfrak{f} \mid 3^{3/2}$ und damit $\tau \not\equiv \gamma^3 (3^{3/2})$, nach Anm. 4.

Wenn man nun auf die Suche nach einer solchen Größe τ geht, um damit zu entscheiden, ob $r = s$ oder $r = s + 1$, braucht man nicht erst in CK die kubische Restprobe mod $3^{3/2}$ anzustellen, sondern es genügt diese Probe in C oder K, in dem Körper, dem die Größe schon angehört. (Bei dem einen der beiden Körper, in dem die Zahl 3 noch kein Idealquadrat ist, kommt das darauf hinaus, den kubischen Restcharakter mod 9 zu untersuchen.) Es enthält nämlich in CK geradeso wie in $\mathsf{P}(\sqrt{-3})$ die Restklassengruppe mod $3^{3/2}$ keine Reste der Ordnung 9, was klar ist in dem Falle, daß 3 in C oder K (welcher Körper gerade der mit der nicht durch 3 teilbaren Diskriminante ist) in Primideale ersten Grades zerfällt, und im andern Fall, daß 3 nicht zerfällt, durch Rechnung leicht nachgeprüft werden kann. Daher kann eine Zahl, die in einem Unterkörper von CK noch nicht kubischer Rest (mod $3^{3/2}$) ist, es auch nicht in CK werden.

Das erleichtert natürlich die Untersuchnug, daß man nur Rechnungen in quadratischen Körpern auszuführen braucht. Kennt man z. B. nur die Grundeinheit aus C und findet, daß sie nicht kubischer Rest ist, so weiß man schon, daß $r = s$ ist. Ist sie kubischer Rest, so können zwar noch beide Fälle eintreten, es ist aber dann sicher die Klassenzahl von K durch 3 teilbar ($r > 0$); denn ist etwa $s = 0$, so kann die Nichtprimärzahl τ hier nur unter den $\varrho_1, \ldots, \varrho_r$ vorkommen. — Im allgemeinen Fall kann man s bestimmen, wenn man die Idealgruppe (Repräsentanten!) von K kennt; umgekehrt r, wenn man in C außer der Idealgruppe die Grundeinheit kennt.

Eingegangen 6. Mai 1931.

Über Sturm-Liouvillesche Reihen mit Lücken.

Von *B. Gagaeff* in Kasan.

Herr S. Sidon hat bewiesen [1]), daß jedes trigonometrische Polynom

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x), \tag{1}$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ganze positive der Bedingung

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} > q > 1 \quad (q \text{ hängt von } k \text{ nicht ab})$$

genügende Zahlen sind, die Ungleichung

$$\int_0^{2\pi} |T_n(x)|\, dx > C \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)} \tag{2}$$

befriedigt, wo C nur von q abhängt.

In dieser Note beweise ich einen analogen Satz für die Sturm-Liouvilleschen Reihen. Die von mir verwendete Methode erlaubt, den Satz von Herrn Sidon auch für trigonometrische Polynome etwas zu verschärfen.

Es seien $\varphi_k(x)$ die den Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + (Q + \lambda)\varphi = 0$$

und den Nebengleichungen

$$\frac{d\varphi}{dx} - h\varphi\Big|_{x=0} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dx} + H\varphi\Big|_{x=\pi} = 0$$

genügenden Sturm-Liouvilleschen Funktionen. Ist $Q(x)$ eine Funktion mit beschränkter Variation und gilt

$$\int_0^{\pi} \varphi_k^2(x)\, dx = 1,$$

so gilt:

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kx + \beta(x) \frac{\sin kx}{k} + \frac{P_k(x)}{k^2}\ ^{2}),$$

wobei $\beta(x)$ beschränkt ist und die $P_k(x)$ gleichmäßig beschränkt sind.

Hilfssatz 1. *Sind λ_k die der Bedingung $\lambda_k < p$ genügenden ganzen positiven Zahlen, so gilt:*

$$\int_0^{\pi} |\Sigma a_k \varphi_{\lambda_k}(x)|\, dx > C \sqrt{\Sigma a_k^2},$$

wo C nur von p abhängt.

[1]) Dieses Journal **163** (1930), S. 251—252.

[2]) Hobson, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **6** (1908), S. 349—395.

Beweis. Wir betrachten die Funktion $\Omega(x) = \frac{\sum_{\lambda_k<p} a_k \varphi_{\lambda_k}(x)}{\sqrt{\sum a_k^2}}$.

Es gilt offenbar:

$$\int_0^\pi \Omega^2(x)\,dx = 1.$$

Es sei $0 < \delta < 1$, δ sonst beliebig, und es sei μ das Maß der Menge der x, für welche gilt: $\Omega(x) > \delta$. Da

$$|\Omega(x)| \leqq \frac{\sqrt{\sum a_k^2 \cdot \sum \varphi_{\lambda_k}^2(x)}}{\sqrt{\sum a_k^2}} \leqq M\sqrt{p} \qquad (M = \mathrm{Max}\,|\varphi(x)|)$$

ist, so folgt:

$$\int_0^\pi \Omega^2(x)\,dx \leqq M^2 p\mu + (\pi - \mu)\,\delta^2,$$

woraus wir schließen, daß

$$\int_0^\pi |\Omega(x)|\,dx > \mu\,\delta > \frac{(1 - \pi\delta^2)\,\delta}{M^2 p - \delta^2},$$

womit der Satz bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Genügt ein System von positiven ganzen Zahlen λ_k den Bedingungen*

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} > q > 1, \qquad \lambda_k > p,$$

so gilt bei hinlänglich großem p:

$$\int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^m a_k \varphi_{\lambda_k}(x)\right| dx \geqq C \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2},$$

wobei C nur von q abhängt.

Beweis. Denn es gilt:

$$\int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^m a_k \varphi_{\lambda_k}(x)\right| dx = \int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^m a_k \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \lambda_k x + \frac{\beta(x)}{\lambda_k} \sin \lambda_k x + \frac{P_{\lambda_k}(x)}{\lambda_k^2}\right)\right| dx$$

$$\geqq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^m a_k \cos \lambda_k x\right| dx - \int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^m \frac{a_k \beta(x) \sin \lambda_k x}{\lambda_k}\right| dx - \int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^m a_k \frac{P_{\lambda_k}(x)}{\lambda_k^2}\right| dx.$$

Setzen wir nun in der Ungleichung (2) $x = 2z$, $b_k = 0$, so sehen wir, daß das erste Integral der rechten Seite nicht kleiner ist als $C\sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2}$, wo C nur von q abhängt.

Ist ferner $|\beta(x)| < A$, so kann das zweite Integral nicht größer sein als

$$\frac{A}{\lambda_1} \int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^m a_k \sin \lambda_k x\right| dx \leqq \frac{A}{\lambda_1} \sqrt{\pi \int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^m a_k \sin \lambda_k x\right|^2 dx} = \frac{\pi A}{\sqrt{2}\lambda_1} \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2}.$$

Ist endlich $|P_{\lambda_k}(x)| < B$, so ist das dritte Integral nicht größer als

$$B \sqrt{\pi^2 \sum_{k=1}^m a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^m \frac{1}{\lambda_1^4 q^{4k}}} < \frac{B\pi}{\lambda_1^2} \sqrt{\frac{q^4}{q^4 - 1} \sum_{k=1}^m a_k^2}.$$

Ist folglich m groß genug, so gilt:

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_{k_\lambda}(x) \right| dx > C \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2},$$

wo C nur von q abhängt.

Hauptsatz. *Genügt ein System von positiven ganzen Zahlen λ_k den Bedingungen*

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} > q > 1,$$

so gilt:

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_{\lambda_k}(x) \right| dx > C \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2},$$

wobei C nur von q abhängt.

Beweis. Wenn mehrere Zahlen des Systems λ_k die Bedingungen des Hilfssatzes 2 befriedigen, so zerlegen wir die Summe $\sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_{\lambda_k}(x)$ in die zwei Summen

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_{\lambda_k}(x) + \sum_{k=n+1}^{m} a_k \varphi_{\lambda_k}(x),$$

wo $\lambda_n < p_1$, $\lambda_{n+1} > p_1$ ist, und wo p_1 die kleinste unter den Zahlen p bedeutet, die den Bedingungen des Hilfssatzes 2 genügen. Nun gilt nach dem Hilfssatz 1:

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_{\lambda_k}(x) \right| dx > C_1 \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2},$$

und nach dem Hilfssatz 2:

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \varphi_{\lambda_k}(x) \right| dx > C_2 \sqrt{\sum_{k=n+1}^{m} a_k^2}.$$

Setzen wir $\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_{\lambda_k}(x) = \Omega_1(x)$, $\sum_{k=n+1}^{m} a_k \varphi_{\lambda_k}(x) = \Omega_2(x)$, und ist E_1 die Menge der Punkte des Intervalls $[0, \pi]$, für welche $\Omega_1(x)$ und $\Omega_2(x)$ dasselbe Vorzeichen haben, E_2 die zu E_1 komplementäre Menge, so folgt:

$$\int_{E_1} |\Omega_1(x) + \Omega_2(x)|\, dx + \int_{E_2} |\Omega_1(x) - \Omega_2(x)|\, dx = \int_0^\pi |\Omega_1(x)|\, dx + \int_0^\pi |\Omega_2(x)|\, dx.$$

Ist C die kleinste unter den Zahlen C_1 und C_2, so gilt:

$$\int_0^\pi |\Omega_1(x)|\, dx + \int_0^\pi |\Omega_2(x)|\, dx > C \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=n+1}^{m} a_k^2} \right) > C \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2}.$$

Daraus schließen wir, daß mindestens die eine der folgenden Ungleichungen gelten muß:

$$\int_{E_1} |\Omega_1(x) + \Omega_2(x)|\, dx \geqq \frac{C}{2} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2},$$

$$\int_{E_2} |\Omega_1(x) - \Omega_2(x)|\, dx \geqq \frac{C}{2} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2}.$$

Im ersten Falle liegt der Beweis auf der Hand. Im zweiten Falle kommen wir zum ersten Fall, indem wir

$$a_k' = -a_k \text{ bei } k > n$$

setzen.

Der angeführte Beweis erlaubt, den Hauptsatz folgendermaßen zu verschärfen: *Sind die λ_k ein System von ganzen positiven Zahlen, die den Bedingungen*

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} > q > 1 \quad bei \quad k \geqq n$$

genügen, so gilt:

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(x) \right| dx > C \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2},$$

wobei C nur von n und q abhängt.

Diese Verschärfung gilt offenbar auch für trigonometrische Polynome.

Eingegangen 26. Mai 1931.

Über einige Verallgemeinerungen der Borelschen Summierung der divergenten Reihen.

Von *Nikola Obreschkoff* in Sofia.

Eine für die Summierung der divergenten Reihen bedeutungsvolle Methode ist die von Borel angegebene: Im Falle der Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \tag{1}$$

bilden wir die Funktion

$$\varphi(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n x^n}{n!}, \quad s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

Ist $\varphi(x)$ eine ganze transzendente Funktion, die gegen einen bestimmten Grenzwert s strebt, falls $x \to \infty$, so heißt s die Summe der Reihe (1). Wie Hardy [1]) zuerst bemerkte, kann aus der Summierbarkeit der Reihe (1) nach dieser Methode nicht immer die Summierbarkeit der Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

gefolgert werden, so daß nicht mehr alle Rechengesetze für die konvergenten Reihen in Kraft bleiben.

Herr Doetsch [2]) hat eine Verallgemeinerung der Borelschen Summierung gegeben, bei der dieselben Rechengesetze wie für die konvergenten Reihen gültig sind. Nach Herrn Doetsch heißt die Reihe (1) (B, k) – summierbar, $k \geqq 0$ beliebig reell, mit der Summe s, wenn $\varphi(x)$ eine ganze Funktion ist und der Ausdruck

$$(\alpha) \qquad \mu^{(k)}(x) = kx^{-k} \int_0^x \varphi(y)(x-y)^{k-1}\, dy, \; k > 0,$$
$$\mu^{(0)}(x) = \varphi(x),$$

gegen einen bestimmten Grenzwert s strebt, falls $x \to \infty$. Indem Herr Knopp [3]) die Ergebnisse einer Arbeit von G. Sannia [4]) erweiterte, hat er eine andere Verallgemeinerung der Borelschen Summierung angegeben. Nach Knopp heißt nämlich die Reihe (1) B_k-summierbar mit der Summe s (k ist eine beliebige reelle Zahl), wenn die Funktion

---

[1]) G. H. Hardy, Researches in the theory of divergent series and divergent integrals, The quarterly journal of pure and applied mathematics **35** (1904), S. 22—66.

[2]) G. Doetsch, Eine neue Verallgemeinerung der Borelschen Summabilitätstheorie der divergenten Reihen, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1920, 56 S.; Über die Cesàrosche Summabilität bei Reihen und eine Erweiterung des Grenzwertbegriffs bei integrablen Funktionen, Math. Zeitschr. **11** (1921), S. 161—179.

[3]) K. Knopp, Bemerkung zum Borelschen Limitierungsverfahren, Rend. del circ. mat. di Palermo **54** (1930), S. 1—4.

[4]) G. Sannia, Nuovo metodo di sommazione delle serie, estensione del metodo di Borel, Rend. del circ. mat. di Palermo **42** (1917), S. 303—322.

$$f_k(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n x^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)},$$

worin, falls m eine ganze negative Zahl oder Null ist, $\frac{1}{\Gamma(m)} = 0$ gesetzt werden muß, für $k \to \infty$ gegen s strebt. Bei dieser Summierung behalten nicht alle Rechengesetze ihre Gültigkeit, wie dies für ganzzahliges k (Summierung von Sannia) von Herrn Doetsch gezeigt wurde.

In dieser Arbeit werden wir feststellen, daß *die Summierung* (B, k) *von Herrn Doetsch mächtiger als die Knoppsche Summierung* B_k *ist.* Außerdem werden wir die Frage nach der Summierbarkeit der Taylorschen Reihe in und auf dem Borelschen Polygon klären.

1. Vergleich der Methoden von Doetsch und Knopp.

Wir werden den folgenden Satz herleiten:

I. *Ist die Reihe* (1) B_k *summierbar,* $k \geqq 0$, *mit der Summe* s, *so ist sie auch* (B, k) *summierbar mit der Summe* s.

Beweis. Für ganzzahliges $k > 0$ wurde dieser Satz bereits von Herrn Doetsch bewiesen. In diesem Fall bedeutet nämlich die B_k-Summierung, daß der Reihe $a_0 + a_1 + \cdots$ eine Summe von k Nullen vorgesetzt und die entstehende Reihe $0 + 0 + \cdots + 0 + a_0 + a_1 + \cdots$ nach der gewöhnlichen Borelschen Methode summiert wird. (Das ist die Methode von Sannia.) Wenn aber die Reihe $0 + 0 + \cdots + 0 + a_0 + a_1 + \cdots$ Borel $= (B, 0)$-summabel ist, so ist, wie Doetsch in seiner Dissertation (S. 26) zeigte, $a_0 + a_1 + \cdots$ (B, k)-summabel. Bei der Beweisführung für beliebiges $k \geqq 0$ werden wir die Laplacesche Transformation anwenden: einer Oberfunktion $f(x)$ entspricht eine Unterfunktion $F(s)$, die durch

$$F(s) = L(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

gegeben ist. Diese Transformation wurde von Doetsch [5]) außer zur Lösung von Integralgleichungen und anderen Funktionalgleichungen gerade auch bei Problemen in der Theorie der divergenten Reihen verwandt. Wir werden auch die Ergebnisse von Doetsch bei dem Beweis benutzen.

Setzen wir

$$(2) \qquad \eta(x) = \int_0^x (x-t)^{k-1} \varphi(t)\, dt, \qquad f_k(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n x^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)},$$

so haben wir nach Knopp [6]):

$$(3) \qquad f_k(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^x e^{-(x-t)} (x-t)^{k-1} \varphi(t)\, dt.$$

Da

$$L\left(\int_0^x \varphi(t)\, \psi(x-t)\, dt\right) = L(\varphi)\, L(\psi)$$

und $L(\varphi)$ existiert [7]), so ergibt sich aus (2) und (3):

---

[5]) G. Doetsch, a) Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus, Math. Ann. **89** (1923), S. 192—207; b) Über den Zusammenhang zwischen Abelscher und Borelscher Summabilität, Math. Ann. **104** (1931), S. 403—414.

[6]) Siehe die in Fußnote [3]) zitierte Arbeit, S. 3.

[7]) Siehe die in Fußnote [5]) zitierte Arbeit b) von Doetsch.

$$L(\eta) = L(x^{k-1})\, L(\varphi) = \frac{\Gamma(k)}{s^k}\, L(\varphi)\,,$$

$$L(f_k) = \frac{1}{\Gamma(k)}\, L(x^{k-1} e^x)\, L(\varphi) = \frac{1}{(s+1)^k}\, L(\varphi)\,.$$

Daraus erhalten wir

$$(4) \quad L(\eta) = \frac{\Gamma(k)}{s^k}\,(s+1)^k\, L(f_k) = \Gamma(k)\, L(f_k) + \frac{(s+1)^k - s^k}{s^k}\,\Gamma(k)\, L(f_k)\,.$$

Die Funktion

$$\varphi(s) = \frac{(s+1)^k - s^k}{s^k} = \frac{k}{s} + \frac{\mu(s)}{s^k}, \quad |\mu(s)| < \mu,$$

hat nach einem Satz von Nörlund [8]) eine Oberfunktion $g(x)$, für welche wir die asymptotische Gleichung

$$(5) \qquad g(x) = \frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)} + o(x^{k-1})$$

aufstellen werden. Betrachten wir dazu die Unterfunktion

$$\psi(s) = \frac{(s+1)^k - s^k}{s^k} - \frac{1}{s^k}\,,$$

deren entsprechende Oberfunktion nach der Umkehrungsformel der Laplacetransformation

$$a(x) = g(x) - \frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xs}\, \psi(s)\, ds$$

ist. Sei jetzt C ein Integrationsweg in der Ebene von s, der folgendermaßen definiert sein möge: $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$, $s = \varrho e^{i\varphi} = \sigma + it$,

C_1: $\sigma = -\alpha, \quad -\infty < t \leqq -\beta \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$,

C_2: $\frac{1}{x} \leqq \varrho \leqq d,\ \varphi = -\theta,\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi,\ \alpha = -d\cos\theta,\ \beta = d\sin\theta$,

C_3: $\varrho = \frac{1}{x}, \qquad -\theta \leqq \varphi \leqq \theta$,

C_4: $\frac{1}{x} \leqq \varrho \leqq d,\ \varphi = \theta$,

C_5: $\sigma = -\alpha, \quad \beta \leqq t < \infty$.

Da $\psi(s) \to 0$ bei $|s| \to \infty$, so haben wir nach dem Cauchyschen Satz:

$$a(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{xs}\, \psi(s)\, ds\,.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine Zahl. Da $(s+1)^k - s^k - 1$ gegen Null strebt, falls $s \to 0$, so wählen wir d so klein, daß für $|s| \leqq d$ gilt:

$$|(s+1)^k - s^k - 1| < \varepsilon\,.$$

Wir haben auf C_3:

$$\left| \int_{C_3} e^{xs}\, \psi(s)\, ds \right| < \varepsilon e\, x^k \frac{1}{x}\, 2\pi = 2\pi e \varepsilon\, x^{k-1}\,.$$

---

[8]) N. E. Nörlund, Leçons sur les séries d'interpolation, Paris 1926, S. 184—187.

Auf C_2:

$$\left|\int_{C_2} e^{xs}\,\psi(s)\,ds\right| < \varepsilon \int_{\frac{1}{x}}^{d} e^{-Kx\varrho}\frac{d\varrho}{\varrho^k} < \varepsilon x^k \int_0^{\infty} e^{-Kx\varrho}\,d\varrho = \frac{\varepsilon}{K}\,x^{k-1}, \quad K>0\,,$$

da wir uns leicht überzeugen können, daß es eine endliche Größe $K>0$ gibt, so daß auf C_2

$$|e^{xs}| < e^{-Kx\varrho}$$

ist. Auf C_5 haben wir ferner:

$$\left|\int_{C_5} e^{xs}\,\psi(s)\,ds\right| \leqq \left|\frac{1}{x}\int_{C_5} e^{xs}\,\psi'(s)\,ds\right| + me^{-\alpha x} < ge^{-\alpha x} = o\,(x^{k-1})\,.$$

Ähnliche Beziehungen haben wir auch auf C_1 und C_4. Folglich ergibt sich $a(x) = o(x^{k-1})$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Aus (4) folgt nun:

$$\mu^{(k)}(x) = kx^{-k}\eta(x) = k\Gamma(k)\frac{f_k(x)}{x^k} + kx^{-k}\int_0^x f_k(t)\,(x-t)^{k-1}\,dt$$

$$+ k\Gamma(k)\,x^{-k}\int_0^x a(t)\,f_k(x-t)\,dt\,.$$

Da $f_k(x) \to s$ und $kx^{-k}\int_0^x f_k(t)\,(x-t)^{k-1}\,dt$ als k-tes Mittel von $f_k(x)$ erst recht gegen s strebt, ferner $a(t) = o\,(t^{k-1})$ ist, so erhalten wir:

$$\lim_{x\to\infty}\mu^{(k)}(x) = s\,,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

II. *Es gibt Reihen, die für jedes $k>0$ (B,k)-summierbar, aber für kein $k>0$ B_k-summierbar sind.*

Beweis. Eine derartige Reihe ist

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \tag{6}$$

in den Punkten $z = 1 + it$, $t \neq 0$, welche die Funktion $\dfrac{1}{1-z}$ darstellt. Wir werden zuerst eine asymptotische Formel für die ganze Funktion

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+r}}{\Gamma(n+r+1)}, \quad r>0\,,$$

aufstellen. Wir erhalten leicht

$$\varphi'(x) = \varphi(x) + \frac{x^{r-1}}{\Gamma(r)}\,,$$

woraus folgt:

$$\varphi(x) = e^x - e^x\int_x^{\infty} e^{-t}\frac{t^{r-1}\,dt}{\Gamma(r)} = e^x - \beta(x)\,.$$

Es sei $|\arg x| \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$; dann werden wir nachweisen, daß

$$\beta(x) = o(x^r).$$

In der Tat, wenn wir setzen $x = ge^{i\varphi}$, $t = \varrho e^{i\varphi}$, so haben wir:

$$|\beta(x)| < \int_g^\infty e^{-(\varrho-g)\cos\varphi} \frac{\varrho^{r-1}}{\Gamma(r)}\, d\varrho = \int_0^\infty \frac{e^{-\varrho\cos\varphi}(\varrho+g)^{r-1}}{\Gamma(r)}\, d\varrho .$$

Ist $0 \leqq r < 1$, so ist wegen $(\varrho+g)^{r-1} < g^{r-1}$

$$|\beta(x)| < g^{r-1} \int_0^\infty \frac{e^{-\varrho\cos\theta}\, d\varrho}{\Gamma(r)} = o(g^r).$$

Ist $r > 1$, $r = n + d$, $0 \leqq d < 1$, so folgt nach partieller Integration, wo $\cos\theta = a$,

$$\int_0^\infty e^{-\varrho a}(\varrho+g)^{n+d-1}\, d\varrho = \frac{1}{a} g^{n+d-1} + \frac{1}{a}(n+d-1)\int_0^\infty e^{-\varrho a}(\varrho+g)^{n+d-2}\, d\varrho$$

$$= o(g^{r-1}) + \frac{1}{a}(n+d-1)\int_0^\infty e^{-\varrho a}(\varrho+g)^{n+d-2}\, d\varrho = \cdots$$

$$= o(g^{r-1}) + \frac{(r-1)(r-2)\cdots d}{a^n}\int_0^\infty e^{-\varrho a}(\varrho+g)^{d-r}\, d\varrho = o(g^r).$$

Setzen wir $z = 1 + it$, $t \neq 0$, so haben wir

$$s_n = 1 + z + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad f_r(x) = \varphi(x)\frac{e^{-x}}{1-z} + \frac{e^{-x}}{z^{r-1}}\varphi(zx)$$

$$= \frac{1}{1-z} + \frac{e^{xit}}{z^{r-1}} + o(x^r e^{-x}).$$

Der Ausdruck e^{xit} strebt nicht gegen einen bestimmten Grenzwert, falls $x \to \infty$, d. h. die Reihe ist für $z = 1 + it$ nicht B_r-summierbar. Aus dem nachfolgenden Satz IV folgt aber, daß die Reihe (6) für jedes $r > 0$ (B, r)-summierbar ist. Durch die Sätze I und II wurde bewiesen, daß die Summierung von Doetsch mächtiger als die von Knopp ist.

2. Summierbarkeitsgebiet nach der Methode (B, k) und Summierung auf dem Rand.

In diesem Teile werden wir uns mit der Bestimmung des genauen Summierbarkeitsgebietes der Taylorschen Reihe einer analytischen Funktion und mit der Summierung auf dem Rand desselben Gebietes beschäftigen. Wir haben den Satz:

III. *Das Summierbarkeitsgebiet einer Taylorschen Reihe mit von Null verschiedenem Konvergenzradius nach der Methode (B, k) fällt mit dem Borelschen Polygon zusammen.*

Beweis. Der Summierung (B, k) wollen wir eine andere Form geben. Führen wir eine partielle Integration in (α) aus, so erhalten wir:

$$\mu^{(k)}(x) = \int_0^x e^{-t}(x-t)^k u(t)\, dt + a_0,$$

wo $u(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n x^{n-1}}{(n-1)!}$ gesetzt wurde. Zuerst haben wir den Hilfssatz:

1. Ist

(7) $$f(z) = \sum_{n=o}^\infty a_n z^n$$

eine holomorphe Funktion innerhalb des Kreises mit dem Durchmesser $0z$ (0 ist der Anfangspunkt $z = 0$) und auf diesem Kreise, so ist die Reihe (7) (B, k) summierbar für z mit der Summe $f(z)$.

Der Satz folgt aus der Tatsache, daß die Taylorsche Reihe nach einem Borelschen Satz absolut summierbar nach der Exponentialmethode ist und jede absolut summierbare Reihe auch (B, k)-summierbar sein muß.

Umgekehrt haben wir den folgenden Hilfssatz:

2. Ist die Reihe (7) (B, k) summierbar für z, so ist sie auch (B, k) summierbar für jeden auf $0z$ liegenden Punkt, und ihre Summe läßt sich außerhalb $0z$ als eine analytische Funktion fortsetzen, die holomorph innerhalb des Kreises mit dem Durchmesser $0z$ ist.

Wir können durch eine lineare Transformation den obigen Fall auf den Fall $z = 1$ zurückführen. Laut Annahme strebt

$$\eta(x) = x^{-k} \int_0^x e^{-t}(x-t)^k u(t)dt, \quad u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^{n-1}}{(n-1)!},$$

gegen einen bestimmten Grenzwert s, falls $x \to \infty$. Wir müssen den Ausdruck

$$\tau(x) = x^{-k} \int_0^x e^{-t}(x-t)^k u(\varrho t)\, \varrho\, dt, \quad 0 < \varrho < 1,$$

untersuchen, oder mit $\varrho t = h$, $\varrho x = y$, $\tau(x) = \tau_\varrho(y)$:

$$\tau_\varrho(y) = y^{-k} \int_0^y e^{-\frac{h}{\varrho}}(y-h)^k u(h)\, dh.$$

Setzen wir noch

$$g_\varrho(y) = \int_0^y e^{-\frac{y-h}{\varrho}}(y-h)^k u(h)\, dh,$$

so haben wir

$$\tau_\varrho(y) = y^{-k} e^{-\frac{y}{\varrho}}\, g_\varrho(y), \qquad \tau_1(y) = \eta(y) = y^{-k}\, e^{-y}\, g_1(y).$$

Wir erhalten ferner:

$$L(g_\varrho) = L(u)\, L(e^{\frac{h}{\varrho}} h^k) = L(u)\, \frac{\Gamma(k+1)}{\left(s - \frac{1}{\varrho}\right)^{k+1}},$$

$$L(g_1) = L(u)\, \frac{\Gamma(k+1)}{(s-1)^{k+1}}.$$

Aus diesen beiden Beziehungen folgt

$$(8) \quad L(g_\varrho) = L(g_1)\, \frac{(s-1)^{k+1}}{\left(s - \frac{1}{\varrho}\right)^{k+1}} = L(g_1) + L(g_1)\, \frac{(s-1)^{k+1} - \left(s - \frac{1}{\varrho}\right)^{k+1}}{\left(s - \frac{1}{\varrho}\right)^{k+1}}.$$

In derselben Weise wie früher können wir leicht feststellen, daß die Unterfunktion

$$\frac{\left(s + \frac{1-\varrho}{\varrho}\right)^{k+1} - s^{k+1}}{s^{k+1}}$$

eine Oberfunktion $\varphi(x)$ hat, für die gilt:

$$\varphi(x) = \left(\frac{1-\varrho}{\varrho}\right)^{k+1} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} + o(x^k).$$

Die Unterfunktion $\dfrac{(s-1)^{k+1} - \left(s - \dfrac{1}{\varrho}\right)^{k+1}}{\left(s - \dfrac{1}{\varrho}\right)^{k+1}}$, die nach Ersetzung von s durch $s + \dfrac{1}{\varrho}$ in die obige übergeht, wird dann eine Oberfunktion $g(x)$ besitzen, für die wir haben:

$$g(x) = e^{\frac{x}{\varrho}} \varphi(x) = \left(\frac{1-\varrho}{\varrho}\right)^{k+1} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} e^{\frac{x}{\varrho}} + e^{\frac{x}{\varrho}} \omega(x), \qquad \omega(x) = o(x^k).$$

Die Formel (8) liefert

$$g_\varrho(x) = g_1(x) + \int_0^x g_1(x-t)\, g(t)\, dt, \tag{9}$$

woraus folgt:

$$\tau_\varrho(x) = e^{-x\left(\frac{1}{\varrho}-1\right)} \tau_1(x) + \frac{x^{-k}\mu^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \int_0^x g_1(t)(x-t)^k e^{-\frac{t}{\varrho}} + x^{-k} \int_0^x g_1(t)\, \omega(x-t)\, e^{-\frac{t}{\varrho}} dt, \tag{10}$$

$$\mu = \frac{1-\varrho}{\varrho}.$$

Da $|g_1(x)| < \mu\, x^k e^k$, so ist das Integral

$$\int_0^\infty g_1(x)\, e^{-\frac{x}{\varrho}} dx$$

bei $0 < \varrho < 1$ konvergent. Wenn aber ein Integral von der Art

$$\int_0^\infty f(x)\, dx$$

konvergent ist, so haben wir für jedes $k > 0$:

$$\lim_{x\to\infty} x^{-k} \int_0^x (x-t)^k f(t)\, dt = \int_0^\infty f(x)\, dx,$$

was ja nichts anderes als der Konsistenzsatz für die Summierung durch Mittelwerte ist. Dann folgt aus (10) sofort

$$\lim_{x\to\infty} \tau_\varrho(x) = \frac{\mu^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \int_0^\infty g_1(t)\, e^{-\frac{t}{\varrho}}\, dt = F(\varrho).$$

Das Integral

$$\int_0^\infty g_1(t)\, e^{-\frac{t}{\varrho}}\, dt$$

ist aber auch absolut konvergent für jedes z mit $R\dfrac{1}{z} > 1$, und stellt eine innerhalb des Kreises $\left|z - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ holomorphe Funktion dar. Es folgt, daß $F(\varrho)$ sich als eine holomorphe Funktion

$$\left(\frac{1-z}{z}\right)^{k+1} \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_0^\infty g_1(t)\, e^{-\frac{t}{z}}\, dt$$

innerhalb des Kreises $\left|z-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ analytisch fortsetzen läßt.

Aus den obigen zwei Hilfssätzen folgt unmittelbar, daß die Reihe (7) (B, k) summierbar im Borelschen Polygon G ist, nicht aber (B, k) summierbar für irgendeinen außerhalb G liegenden Punkt. Das Polygon G ist folgendermaßen definiert: Man verbinde alle singulären Punkte A der durch analytische Fortsetzung aus (7) entstehenden Funktion $f(z)$ mit dem Nullpunkt O und errichte in A auf OA das Lot. Die Gesamtheit der Punkte, die mit O auf derselben Seite aller dieser Lote liegen, machen das Summabilitätspolygon G aus.

Wir werden jetzt die Summierung (B, k) in den Randpunkten des Polygons G untersuchen. Der Fall, daß die Polygonseiten durch Pole von $f(z)$ gehen, wurde von Doetsch betrachtet. Für einen singulären Punkt $a = re^{i\alpha}$ von $f(z)$ werden wir sagen, daß er der Bedingung $B(k)$ genüge, falls im Winkelraume

$$z - a = \varrho e^{i\varphi}, \quad -\theta < \varphi - \alpha < \theta_1, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \varrho < m$$

$f(z)$ regulär ist, ausgenommen für $z = a$, und das Produkt

$$(z-a)^{k+1} f(z)$$

gleichmäßig gegen Null konvergiert, wenn z in obigem Winkelraume gegen a konvergiert. Wir haben den Satz [9]):

IV. *Es sei z ein Randpunkt des Summabilitätspolygons, der kein Eckpunkt ist, d. h. nicht auf zwei Polygonseiten zugleich liegt, und von dem auf der betreffenden Polygonseite liegenden singulären Punkt a verschieden ist. Ist letzterer ein die Bedingung $B(k)$ erfüllender singulärer Punkt, so ist die Reihe* (7) (B, k) *summierbar für z mit der Summe $f(z)$.*

Beweis. Nehmen wir an, daß $z = 1$. Auf dem Kreis K mit dem Durchmesser 01 hat $f(z)$ nur einen singulären Punkt $a = re^{i\alpha}$, der der Bedingung $B(k)$ genügt. Es sei K_1 ein mit K konzentrischer Kreis mit Radius $R > \frac{1}{2}$ und C ein geschlossener, aus zwei Teilen E und D bestehender und den Anfangspunkt enthaltender Weg. Der den Punkt a umschließende Teil E besteht aus den Bögen E_1, E_2, E_3. E_1 ist durch $z - a = \varrho e^{i\varphi}$, $\varphi = \alpha - \theta$, $0 < \tau \leqq \varrho \leqq d$ gegeben, wobei $a + d e^{i(\alpha-\theta)}$ einen Punkt von K_1 darstellt; E_2 durch $\varrho = \tau$, $\theta \leqq \varphi - \alpha \leqq 2\pi - \theta_1$, und schließlich E_3 durch $\tau \leqq \varrho \leqq d_1$, $\varphi = \alpha + \theta_1$, wobei $a + d e^{i(\alpha+\theta_1)}$ ein Punkt, der K_1 angehört. Der Teil D ist ein solcher Bogen von K_1, daß $\alpha + \theta_1 \leqq \varphi \leqq 2\pi + \alpha - \theta$. Es sei außerdem der Radius R so gewählt, daß $f(z)$ holomorph innerhalb und auf C ist. Setzen wir dann

$$\eta(x) = x^{-k} \int_0^x e^{-t} (x-t)^k\, u(t)\, dt,$$

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^{n-1}}{(n-1)!},$$

so erhalten wir die Formel

---

[9]) Vgl. auch meine Arbeit: Sur la sommation de la série de Taylor sur le contour du domaine de sommabilité par les diverses méthodes. Atti del congresso internazionale dei Matematici, Bologna 1928, tomo III, S. 287—291.

$$(11) \qquad \eta(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta \cdot x^{-k} \int_0^x (x-t)^k\, e^{gt}\,dt, \quad g = \frac{1}{\zeta} - 1.$$

Beschreibt ζ den Bogen C, so ist klar, daß g innerhalb eines einfach zusammenhängenden, den Nullpunkt nicht enthaltenden Gebietes G_1 der komplexen Zahlebene bleiben muß. Üben wir die Laplacesche Transformation auf die Funktion

$$F(x) = \int_0^x (x-t)^k\, e^{gt}\,dt$$

aus:

$$L(F) = \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}(s-g)},$$

so können wir leicht auf dem vorher beschriebenen Wege, falls g in G_1 bleibt, die asymptotische Formel

$$(12) \qquad F(x) = \frac{e^{gx}}{g^{k+1}} - \frac{x^k}{g} + o(x^k)$$

beweisen. Sodann haben wir nach (11) und (12):

$$\eta(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,e^{gx}}{\zeta^2\, g^{k+1}\, x^k}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta-1)}\,d\zeta + o(1) = J + f(1) - a_0 + o(1),$$

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,e^{gx}}{\zeta^2\, g^{k+1}\, x^k}\,d\zeta.$$

Es bleibt also noch das Verhalten dieses Integrals bei $x \to \infty$ zu untersuchen. Es seien i_1, i_2, i_3, j die Teilintegrale genommen über die Bogen E_1, E_2, E_3, D. Man kann leicht einsehen, daß auf E gilt:

$$R\left(\frac{1}{\zeta} - 1\right) < T\,|\zeta - a|,$$

wo $T > 0$ und endlich ist. Ist folglich $M(\tau)$ das Maximum von $|f(\zeta)|$ auf E_2, $m > 0$ das Minimum der $|\zeta|^2\,|g|^{k+1}$ auf E_2, so gilt

$$|i_2| < \frac{\tau\, M(\tau)}{m\, x^k}\, e^{T\tau x} = \tau^{k+1}\, M(\tau)\, e^T \to 0,$$

wenn wir $\tau = \frac{1}{x}$ setzen. Es sei $M(R)$ das Maximum von $|f(\zeta)|$ auf D. Aus der Ungleichung $R\left(\frac{1}{\zeta} - 1\right) < -q$, $q > 0$, folgt $\lim_{x\to\infty} j = 0$. Wir wählen $d > 0$ so klein, daß auf E_1

$$\varrho^{k+1}\,|f(\zeta)| < \varepsilon, \qquad \varrho = |\zeta - a|,$$

wo $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine Zahl bedeutet. Da $R(g) < 0$ auf E_1, so werden wir bei $k > 0$ haben:

$$|i_1| < \frac{\varepsilon}{m}\int_\tau^d \frac{d\varrho}{x^k\,\varrho^{k+1}} < \frac{\varepsilon}{m}\int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{d\varrho}{x^k\,\varrho^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{mk}.$$

Wenden wir die Ungleichung $R(g) < -C\varrho$, $C > 0$, auf den Fall $k = 0$ an, so erhalten wir:

$$|i_1| < \frac{\varepsilon}{2\pi m}\int_\tau^d e^{-C\varrho x}\frac{d\varrho}{\varrho} < \frac{\varepsilon x}{2\pi m}\int_0^\infty e^{-C\varrho x}\,d\varrho = \frac{\varepsilon}{2C\pi m}.$$

Wir haben folglich $\lim_{x\to\infty} i_1 = 0$. Ähnlich haben wir $\lim_{x\to\infty} i_3 = 0$, womit der Satz bewiesen ist.

Aus der Beweisführung ersieht man, daß der Satz auch dann in Kraft bleibt, wenn auf dem Kreis K eine endliche Anzahl von singulären Punkten der Funktion $f(z)$ liegen, die der Bedingung $B(k)$ genügen.

Ist der singuläre Punkt ein Pol, so erhalten wir die Ergebnisse von Herrn Doetsch [10]).

Eingegangen 9. Juni 1931.

3. Die Summierung B_k der aus zwei summierbaren Reihen gebildeten Produktreihe.

Es ist nach Herrn Doetsch [9a]) bekannt, daß die im Sinne von Cauchy aus zwei B_k-summierbaren Reihen (k ganze Zahl) gebildete Produktreihe nicht immer nach derselben Methode summierbar ist. Durch eine gewisse Erweiterung der Definition der Summierung B_k werden wir einen allgemeinen Satz für die Summierung der fraglichen Reihe aufstellen. Wir nennen eine Reihe $\sum_0^\infty a_n$ $C_\alpha B_k$-summierbar ($\alpha \geqq 0$) mit der Summe s, wenn die Funktion

$$f_k(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n x^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)}, \quad s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n ,$$

(C, α)-limitierbar ist mit dem limes s, d. h. wenn der Ausdruck

$$\alpha x^{-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f_k(t)\, dt$$

gegen s konvergiert, wenn $x \to \infty$. Es gilt der folgende Satz:

V. *Sei die Reihe*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{13}$$

B_α-summierbar mit der Summe s, die Reihe

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \tag{14}$$

B_β-summierbar mit der Summe t. Dann ist die im Sinne von Cauchy gebildete Produktreihe

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots, \qquad w_n = u_0\, v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 , \tag{15}$$

$C_1 B_{\alpha+\beta}$-summierbar mit der Summe st, $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$.

Zuerst nehmen wir an, daß $u_0 = v_0 = 0$. Ferner setzen wir:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^x e^{-(x-t)} (x-t)^{k-1} \varphi(t)\, dt, \; k = \alpha + \beta, \; \varphi(x) = e^{-x} \sum_0^\infty \frac{s_n x^n}{n!}, \; s_n = \sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu ,$$

Es gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^x e^{-t} t^{k-1} \varphi'(x-t)\, dt = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^x e^{-t} t^{k-1} w(x-t)\, dt, \quad w(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_{n+1} x^n}{n!} ,$$

[9a]) Siehe Doetsch, l. c. [2]), S. 9.

[10]) G. Doetsch, Über die Summabilität der Potenzreihen auf dem Rande des Borelschen Summabilitätspolygons, Math. Ann. 84 (1921), S. 245—251.

und für die Reihen (13) und (14):

$$f_1'(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,u(x-t)\,dt, \qquad u(x) = e^{-x}\sum_0^\infty \frac{u_{n+1}x^n}{n!},$$

$$f_2'(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x e^{-t}t^{\beta-1}\,v(x-t)\,dt, \qquad v(x) = e^{-x}\sum_0^\infty \frac{v_{n+1}x^n}{n!}.$$

Durch Anwendung der Laplaceschen Transformation auf die letzten Gleichungen erhalten wir:

$$(16)\qquad \begin{aligned} L(f_1') &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}L(e^{-x}x^{\alpha-1})\,L(u) = \frac{L(u)}{(s+1)^\alpha}, \\ L(f_2') &= \frac{L(v)}{(s+1)^\beta}, \qquad L(f') = \frac{L(w)}{(s+1)^k}. \end{aligned}$$

Andrerseits ist [11])

$$w(x) = \int_0^x u(t)\,v(x-t)\,dt,$$

woraus

$$(17)\qquad L(w) = L(u)\,L(v)$$

folgt. Aus (16) und (17) erhalten wir

$$L(f') = L(f_1')\,L(f_2'),$$

d. h.

$$f'(x) = \int_0^x f_1'(t)\,f_2'(x-t)\,dt.$$

Nach Integration haben wir

$$f(x) = \int_0^x dy\int_0^y f_1'(t)\,f_2'(y-t)\,dt = \int_0^x f_1'(t)\,dt\int_t^x f_2'(y-t)\,dy = \int_0^x f_1'(t)\,f_2(x-t)\,dt,$$

da $f(0) = f_2(0) = 0$. Nach der Umformung

$$f(x) = \int_0^x f_1'(x-t)\,f_2(t)\,dt,$$

folgt durch abermalige Integration:

$$\int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x f_1(t)\,f_2(x-t)\,dt.$$

Da nach Voraussetzung $\lim_{x\to\infty} f_1(x) = s$, $\lim_{x\to\infty} f_2(x) = t$, so folgt sofort nach einem bekannten Satze [12]) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy = st$, womit der obige Satz bewiesen ist.

Nun kann man leicht den allgemeinen Fall erledigen. Laut Voraussetzung ist die Reihe

$$0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

B_α-summierbar mit der Summe $s - u_0$, die Reihe

---

[11]) Siehe Doetsch, l. c. [2]).

[12]) Siehe Doetsch, l. c. [2]), S. 30.

$$0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

ist B_β-summierbar mit der Summe $t - v_0$. Die im Sinne von Cauchy gebildete Produktreihe dieser zwei Reihen,

$$w_0' + w_1' + w_2' + \cdots, \tag{18}$$

ist CB_k-summierbar mit der Summe $(s - u_0)(t - v_0)$.

Die Reihe (15) läßt sich aus der Reihe (18) herleiten, indem man zu den Gliedern der letzteren die der Reihen

$$\begin{aligned} &u_0 v_0 + u_0 v_1 + \cdots + u_0 v_n + \cdots \\ &0 + v_0 u_1 + \cdots + v_0 u_n + \cdots \end{aligned} \tag{19}$$

addiert. Die Reihen (19) sind aber B_k-summierbar mit den bezüglichen Summen $u_0 t$, $v_0(s - u_0)$, folglich sind sie auch $C_1 B_k$-summierbar, d. h. die Reihe (15) ist $C_1 B_k$-summierbar mit der Summe

$$(s - u_0)(t - v_0) + v_0 t + v_0(s - u_0) = st\,.$$

Analog ergibt sich der allgemeinere Satz:

VI. *Ist die Reihe* (13) $C_{\alpha_1} B_\alpha$*-summierbar mit der Summe* s*, die Reihe* (14) $C_{\beta_1} B_\beta$*-summierbar mit der Summe* t*, so ist die Reihe* (15) $C_{k_1} B_k$ *summierbar mit der Summe* st*, wo* $k = \alpha + \beta$, $k_1 = \alpha_1 + \beta_1 + 1$, $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $\alpha_1 \geqq 0$, $\beta_1 \geqq 0$.

Eingegangen 26. September 1931.

Über eine Anwendung des Verzerrungssatzes auf meromorphe Funktionen.

Herrn Professor **Straubel** in Jena gewidmet.

Von *Egon Ullrich* in Marburg a. d. Lahn.

---

1. Einleitung. Während eine Reihe der bekanntesten Sätze über die Wertverteilung meromorpher Funktionen eine naturgemäße Deutung als Eigenschaften der Riemannschen Flächen $\mathfrak{Z}$ findet, die zu den Umkehrfunktionen gehören, erheben sich gerade aus solchen Deutungsversuchen umgekehrt neue Fragestellungen für die Theorie, die oft erhebliche Schwierigkeiten bieten.

Die Beiträge, die in diesen Zeilen zu solchen Fragen gegeben werden, stützen sich hauptsächlich auf eine elementare Ausnutzung der Tatsache, daß die Umkehrung $\varphi(z) = x$ eine *schlichte* Abbildung von $\mathfrak{Z}$ in die x-Ebene vermittelt. Als Hilfsmittel dient hierzu der Verzerrungssatz der konformen Abbildung. Es wird eine Klasse Riemannscher Flächen untersucht, die vom Standpunkt der Nevanlinnaschen Theorie der Wertverteilung Interesse verdient, nicht zuletzt in Hinblick auf Untersuchungen, die mehrere Mathematiker jüngst über solche Flächen angestellt haben. Es ergeben sich einige Aussagen über die Verzerrung zwischen punktierter Ebene und Riemannscher Fläche, die eine Anwendung auf den bisher noch nicht ganz geklärten Zusammenhang zwischen Nevanlinnaschen Ausnahmewerten und asymptotischen Werten meromorpher Funktionen gestatten.

Eine Stellensorte a heiße *gewöhnliche Sorte*, wenn es eine ε-Umgebung von a gibt, über der die Fläche unverzweigt bleibt. Die Verzerrungseigenschaften *einer* gewöhnlichen Sorte erweisen sich als maßgebend für das Verhalten der Verzerrung in *allen* gewöhnlichen Sorten. Ist z. B. $f'(x)$ dem Betrage nach beschränkt in allen Punkten *einer* gewöhnlichen Sorte, *so ist $f(x)$ höchstens von der Konvergenzklasse der Wachstumsordnung* 2. Und ist umgekehrt $f(x)$ wirklich von größerer Ordnung als 2, so liegen für jede gewöhnliche Sorte a und jedes noch so große M fast alle Werte $f'(x)$ dem Betrage nach oberhalb M. Ist für die betrachtete Fläche die Menge der gewöhnlichen Sorten zusammenhängend, so folgt aus der Beschränktheit von $|f'(x)|$ nach oben oder unten für *eine* gewöhnliche Sorte dasselbe für *alle* gewöhnlichen Sorten, u. a. m.

Für die Vermutung, daß *jeder Nevanlinnasche Ausnahmewert a asymptotischer Wert* sei, d. h. daß es eine Kurve $\mathfrak{c}$ gebe, die in der x-Ebene gegen unendlich führt und auf der $f(x)$ gegen a strebt, ergibt sich unter Anwendung dieser Verzerrungseigenschaften für die betrachtete Funktionenklasse: gewöhnliche und einfach algebraisch verzweigte Stellensorten (solche von *endlicher* Ordnung) kommen für Ausnahmewerte sicher nicht in Frage. Ein Ausnahmewert im Sinne Nevanlinnas oder Valirons kann vielmehr nur eintreten bei *transzendenten* Sorten, denen ja nach einem Satze von Hurwitz und Iversen gerade asymptotische Werte entsprechen, und außerdem möglicherweise bei algebraisch

verzweigten Sorten von *wachsender* Ordnung; darunter seien Sorten verstanden, in deren ε-Umgebung stets nur endlich viele Blätter der Riemannschen Fläche zusammenhängen, ohne daß aber eine Schranke für die Zahl der zusammenhängenden Blätter existiert.

Schließlich wird die Frage gestreift, wann einem endlichen asymptotischen Wert, der zu einer Kurve c gehört, längs derselben Kurve der asymptotische Wert Null der Ableitung entspricht, oder wie wir sagen wollen, wann ein endlicher asymptotischer Wert *ableitungsfest* sei. Mit Hilfe der Theorie der Normalfamilien kann hierfür eine sehr einfache Antwort gegeben werden. Das Ergebnis ist für die obige Vermutung wertvoll, weil auch den Ausnahmewerten Ableitungsfestigkeit zukommt.

I. Funktionen von beschränkter Verzerrung.

2. Riemannsche Flächen. Wir betrachten eine meromorphe Funktion $f(x)$. Die Gesamtheit der Stellen, wo sie einen vorgegebenen Wert z (endlich oder unendlich) annimmt, heiße die *Stellensorte* z oder auch kurz die *Sorte* z. Die Gleichung $f(x) = z$ ist für höchstens abzählbar viele Werte von x erfüllt, die wir mit z_ν bezeichnen; man pflegt sie die z-Stellen von $f(x)$ zu nennen. Verschiedene Sorten bezeichnen wir mit verschiedenen Buchstaben oder unterscheiden sie durch obere Indizes als $z^{(\varkappa)}$. $f(x) = z$ und seine Umkehrung $\varphi(z) = x$ ordnen der x-Ebene eineindeutig die Punkte einer gewissen Riemannschen Fläche $(\mathfrak{Z})$ zu; die Punkte einer festen Koordinate z auf dieser Fläche entsprechen eineindeutig den Stellen z_ν der Sorte z in der x-Ebene, und wir bezeichnen auch sie als die *Sorte* z. Endlich sprechen wir von der *Sortenebene*, als der Projektion der Fläche $\mathfrak{Z}$, in welcher jeder Sorte z der Fläche ein Punkt der Koordinate z entspricht; dies geschieht insbesondere in der Absicht, die Verzweigungseigenschaften der Fläche in der Sortenebene übersichtlich zu notieren.

Über die Grundeigenschaften der Riemannschen Flächen $\mathfrak{Z}$, wie sie durch meromorphe Funktionen als Bilder der x-Ebene erzeugt werden (zur Umkehrung $\varphi(z) = x$ gehören), sind wir unterrichtet durch Arbeiten von Iversen [6], Groß [4], Speiser [11] u. a. [1]). Sie sind unendlich vielblättrig; die Umkehrfunktion wird nur in den Verzweigungsstellen ihrer Riemannschen Fläche $\mathfrak{Z}$ singulär. Einfachste Verzweigungen sind algebraische und logarithmische Verzweigungsstellen, doch spielen daneben Häufungsstellen von diesen beiden eine wichtige Rolle; Häufung ist natürlich auf der Riemannschen Fläche zu verstehen.

Wir treffen zunächst eine Einteilung der Sorten nach dem Verzweigungsverhalten der Fläche $\mathfrak{Z}$ in ihrer Umgebung. Es sei p ein Punkt der Sortenebene; wir richten unser Augenmerk auf das Verhalten der Fläche $\mathfrak{Z}$ über einer ε-Umgebung von p, und denken uns die Fläche längs $|z - p| = \varepsilon$ durchgestanzt. Das Flächenstück innerhalb dieser Kurve kann dabei in Schnitzel zerfallen, und danach unterscheiden wir:

Entweder, es gibt zu p ein positives ε, so daß

a) alle Stücke schlicht ausfallen; dann nennen wir p eine *gewöhnliche Sorte* oder sagen, p habe eine *durchaus schlichte ε-Umgebung*.

b) Alle Stücke fallen endlich vielblättrig aus. p heiße jetzt eine *algebraische Sorte*. Gibt es bei passend gewähltem $\varepsilon > 0$ eine feste ganze Zahl n, so daß kein Stück mehr als n Blätter zählt, so nenne ich p algebraisch von *endlicher*, sonst von *wachsender* (Verzweigungs-)Ordnung.

Oder aber, es ist für jedes noch so kleine positive ε

---

[1]) Eckige Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit. Hierzu eine neue zusammenfassende Darstellung bei R. Nevanlinna [8].

c) unter den ausgestanzten Stücken wenigstens eines unendlich vielblättrig. Dann soll p eine *transzendente Sorte* heißen [2]).

Diese Einteilung findet eine erste Rechtfertigung in dem Satze von Hurwitz und Iversen [6]: *Ist a eine transzendente Sorte der Fläche* $\mathfrak{Z}$, *so ist es auch asymptotischer Wert der meromorphen Funktion* $f(x)$, *und umgekehrt.*

Man bemerkt: Die Menge der transzendenten Sorten ist abgeschlossen. Die Menge der Verzweigungssorten (algebraische und transzendente Sorten) ist abgeschlossen. Eine Sorte kann also Verzweigungssorte sein, ohne daß in einem ihrer Punkte auf der Fläche eine Verzweigung vorliegt — wohl aber in beliebiger Nähe von Punkten der Sorte. Die Menge der gewöhnlichen Sorten kann leer sein [5], [14, S. 129]; ist sie es nicht, so ist sie zweidimensional. Wir werden uns in dieser Arbeit fast ausschließlich auf solche Flächen beschränken, für welche die Voraussetzung besteht:

Voraussetzung I. *Die Menge der gewöhnlichen Sorten ist zusammenhängend und nicht leer.*

Es ist wahrscheinlich, daß man die Voraussetzung über den Zusammenhang eines Tages wird aufgeben können; doch scheint uns das Blochsche heuristische „prinzipe de continuité topologique" [1] bisher noch nicht ausreichend, um hier in Strenge durchzukommen.

3. Verzerrungsschranken in gewöhnlichen Sorten. Unter Aufhebung der üblichen Normierungen lautet der Verzerrungssatz wie folgt:

$\varphi(z) = x$ bilde den Kreis $|z - p| < \varepsilon$ schlicht auf ein Gebiet ab, das ∞ höchstens zum Randpunkt hat. Dann gelten für jedes z der Kreislinie

$$|z - p| = \varrho\varepsilon \qquad (\textit{mit } \varrho < 1)$$

die Abschätzungen

$$(1) \qquad |\varphi'(p)|\frac{1-\varrho}{(1+\varrho)^3} \leqq |\varphi'(z)| \leqq |\varphi'(p)|\frac{1+\varrho}{(1-\varrho)^3},$$

$$(2) \qquad \varepsilon|\varphi'(p)|\frac{\varrho}{(1+\varrho)^2} \leqq |\varphi(z) - \varphi(p)| \leqq \varepsilon|\varphi'(p)|\frac{\varrho}{(1-\varrho)^2}.$$

Die bekannte Fassung entsteht hieraus durch Spezialisierung

$$p = 0, \qquad \varepsilon = 1, \qquad \varphi(p) = 0, \qquad \varphi'(p) = 1.$$

Umgekehrt ergibt sich obige Fassung aus der speziellen, wenn man diese auf die Funktion $g(u)$ anwendet, mit

$$g(u) = \frac{\varphi(\varepsilon u + p) - \varphi(p)}{\varepsilon\varphi'(p)}.$$

Es sei nun a eine gewöhnliche Sorte der Riemannschen Fläche $\mathfrak{Z}$, bzw. der meromorphen Funktion $f(x)$, ε der Radius einer durchaus schlichten Umgebung von a, und $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ die einzelnen Punkte der Sorte in der x-Ebene. $z = f(x)$ ist in der Umgebung jedes Punktes a_ν eindeutig umkehrbar, und es bezeichne $\varphi_\nu(z)$ jenes Element der Umkehrfunktion, das durch $\varphi_\nu(a) = a_\nu$ bestimmt ist, oder auch den hieraus entstehenden Funktionszweig. Alle $\varphi_\nu(z)$ haben Konvergenzradien nicht kleiner als ε, sie bilden alle diesen Kreis auf schlichte Gebiete der x-Ebene ab. Endlich besteht zwischen den Ableitungen von f und φ die Gleichung

$$(3) \qquad f'(a_\nu) = \frac{1}{\varphi_\nu'(a)}.$$

Wir sehen zu, was sich über eine meromorphe Funktion $f(x)$ aussagen läßt, wenn

[2]) Iversen trifft [6] noch eine Unterteilung der transzendenten Sorten. Vgl. § 14.

sie in einer einzigen gewöhnlichen Sorte nach oben beschränkte Verzerrungen (Beträge der Ableitungen) hat. Sei etwa

$$|f'(a_\nu)| \leqq \mathsf{A} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Nach (3) ist das gleichbedeutend mit der Existenz einer positiven unteren Schranke für die Verzerrungen der Umkehrung in der Sorte a, d. h.

$$|\varphi_\nu'(a)| \geqq \mathsf{A}^{-1}.$$

Es sei nun b irgendeine Sorte aus der ε-Umgebung von a, $b_1, b_2, \ldots, b_\nu, \ldots$ ihre Punkte in der x-Ebene, und etwa $|b - a| = \varrho\varepsilon$; natürlich ist auch b eine gewöhnliche Sorte. Dann lehrt die linke Hälfte des Verzerrungssatzes (1)

$$(4) \qquad |\varphi_\nu'(b)| \geqq |\varphi_\nu'(a)| \frac{1-\varrho}{(1+\varrho)^3} \geqq \mathsf{A}^{-1} \frac{1-\varrho}{(1+\varrho)^3}.$$

Dies sichert die Existenz einer positiven unteren Schranke auch für die Verzerrungen der Umkehrfunktionen in den Stellen der Sorte b, bzw. die Existenz einer oberen Schranke für die Verzerrung der meromorphen Funktion in der Sorte b; ich nenne die günstigste Schranke B^{-1} bzw. B, also

$$|\varphi_\nu'(b)| \geqq \mathsf{B}^{-1}, \qquad |f'(b_\nu)| \leqq \mathsf{B}.$$

Die Schranke, die der Verzerrungssatz in (4) gibt, kann natürlich schlechter sein, was uns nicht anficht.

Ganz ebenso könnte man schließen, wenn etwa eine *positive* untere Schranke α für $|f'(a_\nu)|$ bekannt wäre, wir sprechen dann von *unterer* Verzerrungsbeschränktheit. Aus

$$0 < \alpha \leqq |f'(a_\nu)| \quad \text{oder} \quad |\varphi'(a_\nu)| \leqq \alpha^{-1} < \infty \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

folgt für jede Sorte b aus der durchaus schlichten ε-Umgebung von a die Existenz von gleichsinnigen Schranken β,

$$0 < \beta \leqq |f'(b_\nu)| \quad \text{oder} \quad |\varphi'(b_\nu)| \leqq \beta^{-1} < \infty \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Dieses erste Ergebnis fassen wir als

Satz 1. *Ist die Verzerrung $|f'(a_\nu)|$ in allen Punkten einer gewöhnlichen Stellensorte a nach oben oder unten beschränkt, so gilt gleiches für alle Sorten aus jeder durchaus schlichten Umgebung von a.*

Wir richten nun unser Augenmerk auf solche meromorphe Funktionen, für die die Menge der gewöhnlichen Sorten zusammenhängend ist (Voraussetzung I). Dann läßt sich nach einem Verfahren, das der analytischen Fortsetzung völlig analog ist, erkennen: Besteht Verzerrungsbeschränktheit in *einer* gewöhnlichen Sorte, so besteht sie in *allen*. Verzerrungsbeschränktheit ist durch die Sortenebene „fortsetzbar"; Verzweigungssorten spielen hierbei die Rolle von Singularitäten.

Die Sorte ∞ bedarf vielleicht noch einiger Worte. Wir werden sie als gewöhnliche Sorte ansehen, wenn es einen Kreis vom Radius $\frac{1}{\varepsilon}$ gibt, außerhalb dessen alle Blätter von $\mathfrak{Z}$ schlicht sind. Was entspricht nun der Verzerrungsbeschränktheit? Nach der Faustregel gehen wir zu $F(x) = \frac{1}{f(x)}$ über, wofür nun die Sorte 0 eine durchaus schlichte ε-Umgebung besitzt. Sei a ein Punkt daraus, so gilt in allen Punkten der Sorte a von F

$$F'(a_\nu) = \frac{f'(a_\nu)}{f(a_\nu)^2} = a^2 f'(a_\nu).$$

Ist also $f(x)$ in der gewöhnlichen Sorte $\frac{1}{a}$ verzerrungsbeschränkt, so auch $F(x)$ in der

Sorte a und daher nach der eben besprochenen Fortsetzbarkeit der Verzerrungsbeschränktheit auch in der Sorte 0. Daraus folgt:

Ist ∞ gewöhnliche Sorte einer Funktion $f(x)$, so tritt an Stelle der Verzerrungsbeschränktheit nach $\left\{\begin{matrix}oben\\unten\end{matrix}\right\}$ *die Beschränktheit der Residuen nach* $\left\{\begin{matrix}unten\\oben\end{matrix}\right\}$.

Unter Berücksichtigung dieser Regel besteht also der

Satz 2. *Bilden die gewöhnlichen Sorten einer meromorphen Funktion ein zusammenhängendes Kontinuum, so folgt aus der Verzerrungsbeschränktheit (nach oben oder unten) in einer gewöhnlichen Stellensorte, die (gleiche) Verzerrungsbeschränktheit aller gewöhnlichen Sorten.*

Zum Schluß dieses Paragraphen sei noch bemerkt, daß für jede zusammenhängende abgeschlossene Menge gewöhnlicher Sorten nach dem Borelschen Überdeckungssatze *gleichmäßige* Verzerrungsschranken bestehen, wenn solche Schranken für eine Sorte vorhanden sind.

4. Die meromorphen Funktionen, welche Voraussetzung I erfüllen, zerfallen demnach in vier Klassen: Funktionen mit beiderseitiger, mit nur unterer, mit nur oberer Verzerrungsbeschränktheit, und Funktionen ohne Verzerrungsschranken. Nach Satz 2 genügt es, eine einzige gewöhnliche Sorte zu untersuchen, um die Zugehörigkeit einer Funktion festzustellen.

Es fragt sich, ob es Funktionen jeder Klasse gibt. Wir können diese Frage nur teilweise beantworten. Beiderseitig verzerrungsbeschränkt sind z. B. e^x und alle elliptischen Funktionen. Zur zweiten Klasse, wo nur untere Verzerrungsschranken vorhanden sind, gehören z. B. alle Funktionen $e^{p(x)}$, wo $p(x)$ ein Polynom mindestens zweiten Grades ist (vgl. Satz 3). Ob es aber Funktionen gibt, die in gewöhnlichen Sorten keine untere Verzerrungsschranke haben, für die also in jeder gewöhnlichen Sorte a die Verzerrungen $|f'(a_\nu)|$ beliebig nahe an 0 kommen können, das muß hier offen bleiben.

Zur Lösung dieser Aufgabe bedürfte es einer näheren Kenntnis darüber, wie weit eine meromorphe Funktion durch Vorgabe einer Stellensorte a in der x-Ebene, das ist $a_1, a_2, \ldots$, und durch Vorschrift über die Werte der Ableitung in diesen Punkten bestimmt ist: Hat man es dann noch in der Hand, alle Verzweigungsstellen der Riemannschen Fläche aus einer ε-Umgebung der Sorte a fernzuhalten?

Es ist eine gleichbedeutende Aufgabe, eine meromorphe Funktion mit lauter einfachen Polen zu konstruieren, deren Residuen jede Grenze übersteigen, und deren Verzweigungssorten auf einen endlichen Kreis der Sortenebene beschränkt sind.

5. Wir gehen nun zur Ausnutzung der zweiten Hälfte des Verzerrungssatzes (2) über. Unter Annahme der Verzerrungsbeschränktheit

$$\alpha \leqq |f'(a_\nu)| \leqq \mathsf{A} \quad \text{bzw.} \quad \alpha^{-1} \geqq |\varphi_\nu(a)| \geqq \mathsf{A}^{-1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

folgt für eine Sorte b der durchaus schlichten ε-Umgebung von a

$$(5) \quad \alpha^{-1}\varepsilon\frac{\varrho}{(1-\varrho)^2} \geqq |b_\nu - a_\nu| = |\varphi_\nu(b) - \varphi_\nu(a)| \geqq \mathsf{A}^{-1}\varepsilon\frac{\varrho}{(1+\varrho)^2},$$

wenn wir wieder $|b-a| = \varrho\varepsilon$ setzen ($\varrho < 1$).

Je zwei zugeordnete (zum selben Element der Umkehrfunktion gehörige) *Stellen der Sorten a und b haben also einen festen Mindestabstand bei Verzerrungsbeschränktheit von $f(x)$ nach oben, einen festen Höchstabstand bei Verzerrungsbeschränktheit von $f(x)$ nach unten.*

Allgemeiner: Sei $f(x)$ nach unten hin verzerrungsbeschränkt. Sind dann zwei gewöhnliche Sorten a und b in der Sortenebene durch eine Kurve der Länge L aus lauter

gewöhnlichen Sorten verbunden, so gibt es nach der Schlußbemerkung von § 3 eine gleichmäßige Verzerrungsschranke $\gamma \leqq |f'(c_\nu)|$ für alle Sorten c der Kurve und alle $\nu = 1, 2, \ldots$. Dann ist

$$|a_\nu - b_\nu| \leqq \gamma^{-1} L. \tag{6}$$

Ist $f(x)$ nach oben verzerrungsbeschränkt, so folgt aus der rechten Hälfte von (5) für $\varrho \to 1$: Die Bilder der ε-Umgebung von a in der x-Ebene enthalten alle eine feste Kreisscheibe vom Radius $d = \frac{\varepsilon}{4A}$. Je zwei Punkte a_ν und a_μ der Sorte a sind danach voneinander um mindestens $2d$ entfernt. Für eine Menge von Punkten in der Gaußschen Ebene, die diese Eigenschaft haben, gilt bekanntlich [3]):

Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{-\lambda}$ *konvergiert für jedes* $\lambda > 2$.

Wir benutzen fortan die Begriffe der Nevanlinnaschen Theorie der meromorphen Funktionen [7]. Ein bekannter Satz [7, S. 27–29] besagt, daß diese Reihenaussage gleichbedeutend ist mit:

Die Anzahl $n(r, a)$ *und die Anzahlfunktion* $N(r, a)$ *zur Sorte* a *ist höchstens von der Konvergenzklasse der Wachstumsordnung* 2.

Dies gilt für jede gewöhnliche Sorte, wenn $f(x)$ nach oben verzerrungsbeschränkt ist, insbesondere für a und zwei Nachbarsorten b, c aus seiner durchaus schlichten Umgebung. Der zweite Hauptsatz der Theorie der meromorphen Funktionen

$$T(r, f) \leqq N(r, a) + N(r, b) + N(r, c) + O[\log r\, T(r, f)] \tag{7}$$

lehrt also

Satz 3. *Eine meromorphe Funktion, welche in einer einzigen gewöhnlichen Sorte nach oben verzerrungsbeschränkt ist, ist höchstens von der Wachstumsordnung* 2, *genauer sogar von der Konvergenzklasse dieser Ordnung.*

Die elliptischen Funktionen sind von der Konvergenzklasse der Wachstumsordnung 2 und sogar beiderseitig verzerrungsbeschränkt. Die Schranke ist also genau.

6. Untere Ordnung einer Funktion. Es läßt sich aus den obigen Betrachtungen ein noch interessanteres Ergebnis herauslesen, wozu wir einen Hilfsbegriff einführen wollen. Man pflegt bei der Untersuchung wachsender Funktionen das Wachstum meist nur nach oben hin einzuschränken. So versteht man unter der (*oberen*) *Wachstumsordnung* z. B. von $n(r, a)$ den

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log n(r, a)}{\log r} = \omega_n;$$

für unsre Zwecke empfiehlt es sich, parallel als *untere Wachstumsordnung* den

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log n(r, a)}{\log r} = v_n$$

zu erklären. Dann ist, was auch als Definition gelten könnte, für jedes $\delta > 0$ und

(8) für alle $r > R(\delta)$ $\qquad n(r, a) > r^{v-\delta}$,

(9) für gewisse $r_1, r_2, \ldots \to \infty$ $\qquad n(r_\nu, a) < r_\nu^{v+\delta}$.

Analog verfährt man für beliebige wachsende Funktionen von r.

[3]) Man beweist dies leicht wie folgt: Hat man eine Punktmenge in der x-Ebene, deren Punkte sich nicht näher als $d > 0$ kommen, so fasse man alle Punkte — also Reihenglieder — zusammen, die im Kreisring zwischen den Radien n und $n+1$ gelegen sind. Solcher Punkte gibt es nicht mehr als kn, wo k von n nicht mehr abhängt. Die entsprechende Teilsumme der Reihe ist also

$$\leqq kn \cdot n^{-\lambda} = k \cdot n^{-(\lambda-1)}$$

und die Reihe der Teilstücke, die eine Majorante der gegebenen Reihe ist, ist jedenfalls konvergent, sobald $\lambda - 1 > 1$, w. z. b. w.

Lemma: *Die unteren Ordnungen von Anzahlen $n(r, a)$ und Anzahlfunktionen $N(r, a)$ stimmen überein. Gleiches gilt für die oberen Ordnungen:*

$$v_n = v_N, \qquad \omega_n = \omega_N.$$

Beweis: Wegen (8) ist ja für genügend große r (alle $r > R$)

$$N(r, a) = \int_R^r \frac{n(t, a)}{t}\, dt + N(R, a) \geqq r^{v-2\delta}$$

also $v_N \geqq v_n$; und wegen (9) ist für alle $r_\nu > 1$

$$N(r_\nu, a) \leqq n(r_\nu, a) \log r_\nu + N(1, a) \leqq r_\nu^{v+2\delta},$$

also $v_N \leqq v_n$; beides gibt die erste Behauptung. Der Beweis des zweiten Teiles über die obere Ordnung bietet ebenfalls keine Schwierigkeit [7, S. 27–29].

Indem wir von einer wachsenden Funktion, wie der Charakteristik $T(r, f)$ einer meromorphen Funktion $f(x)$, obere und untere Wachstumsordnung angeben, schließen wir sie nach beiden Seiten hin ein, und können allzugroße Unregelmäßigkeiten des Wachstums ausschalten. Für die geläufigsten ganzen und meromorphen Funktionen fallen die beiden Begriffe übrigens zusammen; sie sind von *regulärem* Wachstum.

7. Funktionen ohne obere Verzerrungsschranken. Wir knüpfen wieder bei Satz 3 an und bemerken, daß nach ihm eine Funktion von einer Wachstumsordnung größer als 2 oder von der Divergenzklasse der Ordnung 2 in keiner gewöhnlichen Stellensorte nach oben hin verzerrungsbeschränkt sein kann; damit ist zugleich unser Beispiel für die zweite Funktionenklasse in § 4 gerechtfertigt. Immerhin kann es aber noch immer unendlich viele Punkte in einer Stellensorte geben, wo

$$|f'(a_{n_\nu})| \leqq \mathsf{A}$$

ist. Die Anzahl dieser Punkte der Sorte a im Kreise $|x| < r$ sei $n_{\mathsf{A}}(r, a)$.

Ganz ebenso wie in § 5 schließen wir jetzt, daß die Reihe $\sum_\nu |a_{n_\nu}|^{-\lambda}$ für jedes $\lambda > 2$ konvergiert, oder daß $n_{\mathsf{A}}(r, a)$ und $N_{\mathsf{A}}(r, a)$ höchstens von der Konvergenzklasse der (oberen) Wachstumsordnung 2 sind.

Es sei nun $f(x)$, das heißt seine Charakteristik $T(r, f)$, von einer *unteren* Wachstumsordnung *größer* als 2. Dann ist auch $N(r, a)$ und nach dem Lemma $n(r, a)$ von gleicher unterer Ordnung [4]), und der Quotient $n_{\mathsf{A}}(r, a) : n(r, a)$ strebt gegen null.

Satz 4. *Die meromorphe Funktion $f(x)$ sei von einer unteren Ordnung größer als 2. Wie groß eine Schranke A auch vorgegeben sei, es liegt in fast allen Stellen der gewöhnlichen Sorte a die Verzerrung $|f'(a_\nu)|$ oberhalb von A, oder genauer, es gilt*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_{\mathsf{A}}(r, a)}{n(r, a)} = 0. \tag{10}$$

Ähnliches gilt übrigens noch für Funktionen der Ordnung 2, wenn

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{T(r, f)}{r^2} > 0. \tag{11}$$

Dieser Satz scheint uns in gewisser Hinsicht recht bemerkenswert: $f(x)$ bildet die *einblättrige* x-Ebene auf die *unendlich vielblättrige* Riemannsche Fläche $\mathfrak{Z}$ ab. Naive Betrachtung ließe erwarten, daß das im allgemeinen nur mit beträchtlichen Vergrößerungen möglich ist. Unser Satz zeigt, wie weit eine solche Erwartung wirklich bestätigt ist.

---

[4]) Nach dem 2. Hauptsatze (7) kann es höchstens zwei Sorten geben, wo das nicht gilt. Wir erkennen später, daß diese Ausnahmen auf keine gewöhnlichen Sorten fallen.

Dem Kreise $|x| < r$ entspricht ein gewisses Teilstück $\mathfrak{Z}_r$ von $\mathfrak{Z}$. Wächst $T(r, f)$ bzw. $n(r, a)$ rasch genug, d. h. nimmt die Blattzahl von $\mathfrak{Z}_r$ über der Stelle a rasch genug zu, so gelingt die gewünschte Abbildung in der Tat nur durch relativ große Verzerrungen.

Diese Betrachtungen ließen es doppelt interessant erscheinen nach Funktionen zu suchen, die der dritten und vierten Klasse nach § 4 angehören, deren Verzerrungen also in jeder gewöhnlichen Sorte dem Werte 0 beliebig nahe kommen.

8. Zur Anwendung des Verzerrungssatzes. Diese Anwendungen des Verzerrungssatzes legen es nahe, nach den *günstigsten* Schranken zu fragen, die der Verzerrungssatz liefert, wenn man ihn mehrmals nach einander anzuwenden hat; dies wird z. B. notwendig, wenn die Funktion $\varphi'(z)$ auf einer Kreislinie um eine Verzweigungsstelle abgeschätzt werden soll. Es ist keine Einschränkung, die Peripherie des Einheitskreises zu betrachten, da (1) den Radius ε des schlicht abgebildeten Kreises gar nicht enthält, sondern nur ϱ, d. i. das Verhältnis zwischen Schrittlänge und Radius. Es sei also etwa die Stelle 0 die einzige Singularität von $\varphi(z)$ im Kreise $|z| < 2$, $\varphi'(1)$ bekannt und eine Abschätzung der Werte von $|\varphi'(e^{i\vartheta})|$, der Verzerrungen auf der Einheitskreislinie, gesucht.

Schon um nach dem Punkte $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ zu kommen, wäre die Schrittlänge $\varrho = 1$ erforderlich, und die rechte Seite von (1) würde versagen. Man muß also in wenigstens zwei Schritten, z. B. 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ nach der gewünschten Stelle gehen und erhält so eine endliche Schranke. Danach könnte man allgemein erwarten, daß man eine umso bessere Schranke erhält, je kleiner man die einzelnen Schritte macht, obgleich dann mehr Schritte nötig sind.

Dies ist bei der Abschätzung längs einer Kreislinie in der Tat der Fall. Um z. B. $|\varphi'(e^{2i\pi})|$ abzuschätzen, denken wir dem Einheitskreise ein regelmäßiges n-Eck von der Seitenlänge s_n eingeschrieben und erhalten dann durch n-malige Anwendung der rechten Seite von (1)

$$|\varphi'(e^{2i\pi})| \leqq |\varphi'(1)| \frac{(1 + s_n)^n}{(1 - s_n)^{3n}}, \qquad (n > 6).$$

Dieser Bruch nimmt mit wachsendem n monoton ab, wovon man sich auf verschiedenen Wegen, wenn auch in längerer Rechnung, so doch ohne prinzipielle Schwierigkeiten, überzeugt; die beste Grenze entsteht daher für $n \to \infty$. Die Bestimmung des Grenzwertes gelingt, indem man Zähler und Nenner für sich betrachtet, $s_n = 2 \sin \frac{\pi}{n} = \frac{1}{t}$ setzt und so z. B. für den Zähler zur Ermittlung des Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty} (1 + s_n)^n = \lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{2\pi t}{1+o(1)}} = e^{2\pi}$$

geführt wird, wo $\arcsin \frac{1}{2t} = \frac{1}{2t}[1 + o(1)]$ benutzt ist. Ebenso wird der Nenner behandelt. Der Bruch hat den Grenzwert $e^{8\pi} \sim 8{,}22 \cdot 10^{10}$. Allgemeiner kann man so für die Verzerrung in einem beliebigen Punkte des Einheitskreises die Aussage erhalten:

Satz 5. *Die Funktion $\varphi(z) = x$ bilde ein Riemannsches Flächenstück über $|z| < 2$, das sich nur um den Punkt $z = 0$ windet, schlicht ab. Setzt man die Funktion $\varphi'(z)$ von $z = 1$ aus längs der Peripherie des Einheitskreises um ein Stück der Bogenlänge $|\vartheta|$ fort, so ergibt sich nach dem Verzerrungssatz die günstigste Schranke bei infinitesimalem Fortschreiten als das $e^{4|\vartheta|}$-fache von $|\varphi'(1)|$, also*

$$e^{4|\vartheta|}\,|\varphi'(1)| \leqq |\varphi'(e^{i\vartheta})| \leqq e^{4|\vartheta|}\,|\varphi'(1)|\,. \tag{12}$$

Dieser Satz gilt unverändert, wenn man die Normierung auf den Einheitskreis fallen läßt.

Bei Fortsetzung um ganzzahlige Bruchteile des Kreisumfangs, also etwa um $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, sind die auftretenden Faktoren Zahlen, die wie e^{π} in der letzten Zeit die Mathematiker durch die Entdeckung ihrer Transzendenz sehr beschäftigt haben.

II. Asymptotische Werte und Ausnahmewerte.

9. Regelmäßig verteilte Sorten. Eine Stellensorte a heiße *regelmäßig verteilt*, wenn für ein gewisses positives d

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r+d,\,a)}{n(r,\,a)} = 1 \tag{13}$$

ist. Man bemerkt sofort, daß dann dieser Grenzwert für jedes reelle d gleich 1 ist. Die Bedeutung dieser Festsetzung ist, etwas beiläufig gesagt, daß in Kreisringen fester Breite d zwischen r und $r+d$ nur wenige a-Stellen im Vergleich zur Menge im ganzen Kreise $r+d$ liegen sollen.

Eine Sorte ist z. B. regelmäßig verteilt, wenn $n(r, a) \sim r^{\omega}$ für ein endliches ω (endliche Wachstumsordnung); sie ist es nicht, wenn $n(r, a) \sim e^{r}$ (unendliche Wachstumsordnung). Es gibt aber Funktionen unendlicher Wachstumsordnung mit regelmäßiger Verteilung. Ein Beispiel liefert etwa $n(r, a) \sim r^{u(r)}$ mit $u(r) = \log r$, allgemeiner mit $u(r) = o(r)$ und $[u(r+d) - u(r)] \log (r+d) = o(1)$.

Sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion, die den Voraussetzungen genügt:

I. Die Menge der gewöhnlichen Sorten ist zusammenhängend.

II. $f(x)$ ist in *einer* gewöhnlichen Sorte (also in allen) verzerrungsbeschränkt nach unten.

III. $f(x)$ besitzt *eine* regelmäßig verteilte gewöhnliche Sorte a.

Voraussetzung II kann ersetzt werden durch

II a. $f(x)$ ist von einer *unteren* Wachstumsordnung größer als 2.

Nach Satz 4 spielen dann nämlich die Stellen der Sorte a, wo etwa $|f'(a_\nu)| < A$ ist, im Beweise des Satzes 6 nur eine ganz nebensächliche Rolle.

Satz 6. *Unter diesen Voraussetzungen sind alle gewöhnlichen Sorten von $f(x)$ regelmäßig verteilt.*

Die Behauptung folgt wegen II aus der linken Hälfte der Ungleichung (5), zunächst für jede Sorte b der durchaus schlichten Umgebung von a. Wegen

$$|b_\nu - a_\nu| \leqq \alpha^{-1}\,\varepsilon\,\frac{\varrho}{(1-\varrho)^2} = d \tag{14}$$

ist nämlich

$$n(r-d,\,a) \leqq n\,(r,\,b) \leqq n\,(r+d,\,a)\,,$$

und daraus folgt bei Division durch $n(r, a)$ und Grenzübergang $r \to \infty$ wegen III und (13) die wichtige Formel

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r,\,b)}{n(r,\,a)} = 1. \tag{15}$$

Die Gültigkeit dieser Formel setzt sich wieder nach I durch alle gewöhnlichen Sorten fort. Und daraus folgt, daß (15) für jedes beliebige Paar gewöhnlicher Sorten besteht, w. z. b. w.

Gleichung (15) *und damit Satz* 6 *gilt allgemeiner auch für jede isolierte algebraische Sorte* b *von endlicher Ordnung.*

Um dies einzusehen, ziehen wir um b in der Sortenebene einen Kreis $\mathfrak{k}$ von solchem Radius ε, daß in $|z-b|<2\varepsilon$ keine andre Verzweigungssorte liegt. Es sei a eine Sorte von $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}_\nu$ der in positivem Sinne einfach durchlaufene volle Kreisbogen, der in dem a_ν entsprechenden Flächenpunkte beginnt.

Sei nun α eine untere Verzerrungsschranke für die gewöhnliche Sorte a entweder im Sinne von II für alle a_ν oder im Sinne von II a für fast alle; hier können alle a_ν, für die diese Schranke etwa nicht gilt, ganz außer Betracht bleiben. Für die sämtlichen Sorten von $\mathfrak{k}$ gibt es dann eine positive gemeinsame Verzerrungsschranke γ, die nach (12) im ungünstigsten Falle gleich $e^{-4\pi}\alpha$ ist (man setze von a nach beiden Seiten hin längs eines Halbkreises fort). Das Bild jedes Bogens $\mathfrak{k}_\nu$ in der x-Ebene ist daher nach (6) nicht länger als

$$\gamma^{-1}2\pi\varepsilon \leqq e^{4\pi}\alpha^{-1}\,2\pi\varepsilon = 2d\,.$$

Endlich benutzen wir die Voraussetzung, daß b algebraisch von endlicher Ordnung ist. Es gibt also eine feste Zahl m, so daß höchstens je m Bogen $\mathfrak{k}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{k}_{\nu+\mu}$ bzw. Stellen $a_{\nu+1}, \ldots, a_{\nu+\mu}$ $(\mu < m)$ zu einem Zyklus zusammentreten. Der μ-blättrige Bereich mit dem Rande $\mathfrak{k}$ wird in die x-Ebene einschließlich des Randes konform und schlicht abgebildet, und sein Bildrand ist nicht länger als $2md$, der Bilddurchmesser nicht länger als md; das Bild umschließt den μ-fachen Punkt $b_{\nu+1} = \cdots = b_{\nu+\mu}$ der Sorte b, und es ist daher wieder

$$|b_\nu - a_\nu| < md\,, \tag{16}$$

woran sich dieselben Schlüsse wie schon oben an (14) knüpfen.

10. Anwendung auf Ausnahmewerte. Unter einem Picardschen Ausnahmewert versteht man einen Wert, den die Funktion $f(x)$ nur endlich oft annimmt, unter einem Borelschen Ausnahmewert einen Wert, für den Anzahl $n(r, a)$, und damit Anzahlfunktion $N(r, a)$, von kleinerer Wachstumsordnung ist als die Charakteristik $T(r, f)$ der Funktion. Nach klassischen Sätzen kann eine meromorphe Funktion höchstens zwei solche Ausnahmewerte haben.

Ganz erheblich feiner als diese Begriffe sind die Ausnahmewertdefinitionen nach Nevanlinna und Valiron [7], [13]. Unter den *Defekten* einer Stellensorte z verstehen wir die Größen (für $r \to \infty$)

$$\delta(z) = 1 - \overline{\lim}\,\frac{N(r,z)}{T(r,f)}\,, \qquad \Delta(z) = 1 - \underline{\lim}\,\frac{N(r,z)}{T(r,f)}\,. \tag{17}$$

z soll nun Nevanlinnascher Ausnahmewert heißen, wenn $\delta(z)$, Valironscher Ausnahmewert, wenn $\Delta(z)$ positiv ist. Offenbar ist $\delta \leqq \Delta$, also die letzte Definition die weiteste; übrigens ist für einen Picardschen Ausnahmewert $\delta(z) = 1$, für einen Borelschen $\Delta(z) = 1$, so daß sich die klassischen Definitionen diesen moderneren einordnen [12, S. 600]. Es gelten die Sätze:

Die Menge der Nevanlinnaschen Ausnahmewerte ist höchstens abzählbar; *die Defekte erfüllen die Relation* $\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\delta(z^{(\varkappa)}) \leqq 2$.

Die Menge der Valironschen Ausnahmewerte oder -sorten kann auf der Riemannschen Kugel in eine Kreisfolge eingeschlossen werden, deren Radiensumme kleiner bleibt als jedes vorgegebene $\eta > 0$; *m. a. W. sie ist vom linearen Maß null.*

Jeder Picardsche Ausnahmewert a ist asymptotischer Wert[5]) der meromorphen Funktion $f(x)$, d. h. es gibt eine Kurve $\mathfrak{c}$, die in die wesentliche Singularität ∞ mündet

[5]) Vgl. z. B. Bieberbach, Funktionentheorie II, § 8 des Kapitels „Ganze Funktionen".

und längs der $f(x)$ gegen den Grenzwert a strebt. a ist daher nach dem Satze von Hurwitz-Iversen eine transzendente Sorte.

Allgemeiner wird vermutet, daß auch jeder Nevanlinnasche Ausnahmewert asymptotischer Wert sei, ohne daß es aber bisher gelungen wäre, dies in aller Allgemeinheit zu beweisen [6]). Unsre Anwendungen des Verzerrungssatzes gestatten es, ganz mühelos für eine weite Klasse meromorpher Funktionen Beiträge zu dieser Frage zu geben. Es gilt nämlich

Satz 7. *Erfüllt eine meromorphe Funktion die Voraussetzungen I, II oder II a, und III, so ist keine ihrer gewöhnlichen und keine ihrer isolierten algebraischen Sorten endlicher Ordnung eine Ausnahmesorte im Valironschen Sinne: Für jede solche Sorte ist* $\Delta(z) = 0$.

Keine dieser Sorten ist also nach einer beliebigen von den angegebenen Definitionen Ausnahmesorte.

Zum Beweise benutzen wir die Beziehung

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r, b)}{n(r, a)} = \lim_{r\to\infty} \frac{N(r, b)}{N(r, a)}\,, \tag{18}$$

die stets gilt, wenn der Grenzwert links vorhanden ist; sie folgt aus einem Hilfssatze, den ich in einer früheren Arbeit bewiesen habe [12]. Nach (15) ist für je zwei Sorten der genannten Art dieser Grenzwert gleich 1, und aus

$$\varliminf \frac{N(r, b)}{T(r, f)} = \lim \frac{N(r, b)}{N(r, a)} \cdot \varliminf \frac{N(r, a)}{T(r, f)} = \varliminf \frac{N(r, a)}{T(r, f)}$$

folgt dann wegen (17)

$$\Delta(b) = \Delta(a)\,.$$

Hätte also eine einzige gewöhnliche oder algebraische Sorte endlicher Ordnung positiven Valirondefekt, so hätten alle gewöhnlichen Sorten denselben Defekt. Dies kann aber nach dem oben angeführten Satze nicht sein, sofern die Menge der gewöhnlichen Sorten nicht leer ist, weil sie dann ganze Kreisscheiben enthält und nicht mehr in eine Kreisfolge von beliebig kleiner Radiensumme eingeschlossen werden kann.

Auch dieses Ergebnis entspricht wieder der Anschauung, die uns die gewöhnlichen Sorten eines durchaus schlichten Bereichs der Sortenebene bzw. der Riemannschen Fläche $\mathfrak{Z}$ als völlig gleichberechtigt erscheinen läßt. Ein Defekt würde einer Lücke der Fläche in einer gewissen Sorte entsprechen, oder aber er könnte dadurch entstehen, daß das Flächenstück $\mathfrak{Z}_r$, das Bild von $|x| < r$, sich langsamer über die Ausnahmestelle der Sortenebene hin ausbreitet als über andre Stellen, indes r über alle Grenzen wächst.

Als Ausnahmesorten kommen also nach Satz 7 nur mehr algebraische Sorten von wachsender Ordnung und transzendente Sorten in Frage [7]); den letzten entsprechen die asymptotischen Werte. Offenbar ist es nach den obigen Schlußweisen unmöglich, die algebraischen Sorten wachsender Ordnung auszuschließen, weil in den Betrachtungen, die zu Formel (16) führen, dann kein festes, von ν unabhängiges m zur Verfügung steht, so daß hier nicht mehr auf die Gültigkeit von (15) geschlossen werden kann. Wir neigen zur Ansicht, dies liege besonders daran, daß unsre Methode die Nevanlinnaschen Ausnahmewerte nicht gegen die Valironschen abhebt. In den nächsten Abschnitten werden wir noch von andrer Seite Einblick in diese Frage gewinnen.

11. Funktionen ohne asymptotischen Wert können auch keinen Ausnahmewert

[6]) Collingwood [3], Nevanlinna [7, § 46], Cartan [2]. Nach einer brieflichen Mitteilung hat Hr. Frithjof Nevanlinna den Collingwoodschen Ansatz auch auf algebraische Sorten (endlicher Ordnung) erweitern können.

[7]) Übrigens auch nichtisolierte algebraische Sorten von endlicher Ordnung. Sie dürften aber nach dem Blochschen „principe de continuité topologique“ ausscheiden [1].

haben, wenn die Collingwood-Nevanlinnasche Vermutung richtig ist. Es wird daher nützlich sein, bekannte Funktionenklassen in dieser Richtung zu untersuchen.

Hierher gehören z. B. die *Juliaschen Ausnahmefunktionen.* Sie ergeben sich so: Julia betrachtet in seinen Arbeiten neben jeder meromorphen Funktion $f(x)$ die Familie $\mathfrak{M}_t$ der Funktionen $g_t(u) = f(c(t)x)$, wo $c(t)$ für $0 \leqq t < \infty$ Parameterdarstellung einer Kurve c ist, die für $t \to \infty$ in die wesentliche Singularität ∞ hineinführt. Der Picardsche Satz ist gleichbedeutend damit, daß $\mathfrak{M}_t$ nicht für $|x| < 1$ Normalfamilie sein kann. Gibt es aber vielleicht Funktionen, die für das Ringgebiet $0 < |x| < 1$ Normalfamilien $\mathfrak{M}_t$ erzeugen? Wenn eine meromorphe Funktion das leistet, so heiße sie Juliasche Ausnahmefunktion.

Eine Schlußweise ganz ähnlich wie später in § 13 zeigt, daß die Familie $\mathfrak{M}_t$ nicht normal sein kann, sobald $f(x)$ einen asymptotischen Wert hat, ohne daß aber diese Bedingung auch schon hinreichend wäre. Ostrowski [8] hat ein System von sehr einfachen notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, daß $f(x)$ Ausnahmefunktion sei, darunter diese: Es gibt eine Konstante K, die nur von $f(x)$ aber nicht von r abhängt, so daß

$$|n(r, 0) - n(r, \infty)| \leqq K$$

ist. Daraus folgt $n(r, 0) : n(r, \infty) \to 1$, und, da mit $f(x)$ auch $f(x) - a$ eine Ausnahmefunktion ist, die Gültigkeit von (15) für je zwei beliebige Stellensorten. Die Methode des Beweises von Satz 7 zeigt also, *daß eine Juliasche Ausnahmefunktion keinen Ausnahmewert haben kann* (im Valironschen und jedem andren Sinne).

Ein andres Beispiel von Funktionen ohne asymptotischen Wert bilden die elliptischen Funktionen, wo nach der geometrischen Konfiguration der Wertverteilung das Bestehen von (15) und damit das Fehlen von Ausnahmewerten trivial ist.

12. Ableitungsfestigkeit der Verzweigungseigenschaften. An andrer Stelle [12] habe ich gezeigt:

Hat eine meromorphe Funktion $f(x)$ einen endlichen Ausnahmewert im Sinne von Nevanlinna oder Valiron, so hat auch die Ableitung $f'(x)$ mindestens einen Ausnahmewert im gleichen Sinne, nämlich den Wert 0.

Diese Eigenschaft der Ausnahmewerte, beim Übergang von einer Funktion zu ihrer Ableitung (und auch bei allen höheren Ableitungen) erhalten zu bleiben, bezeichne ich als *Ableitungsfestigkeit.* Sie ist daraus zu verstehen, daß auch mehrfache Stellen einer Funktion beim Übergang zur Ableitung erhalten bleiben: An jeder p-fachen a-Stelle von $f(x)$ hat die Ableitung $f'(x)$ eine $(p-1)$-fache Nullstelle. Während aber diese Eigenschaft bei wiederholtem Ableiten schließlich verschwindet, bleibt das Bestehen eines endlichen Ausnahmewerts auf Ableitungen von *beliebig hoher* Ordnung einflußreich: *Jede* Ableitung hat den Ausnahmewert 0. Man wird daher auch von hier aus in den Ausnahmewerten etwas wie Verzweigungsstellen unendlich hoher Ordnung erwarten, so daß der obige Satz als eine Stütze der Collingwood-Nevanlinnaschen Vermutung zu werten ist.

Unsre Betrachtungen haben aber neben den transzendenten Sorten (den asymptotischen Werten) noch die algebraischen Sorten von *wachsender* Ordnung als eine Möglichkeit für Ausnahmesorten offen gelassen. Es liegt auf der Hand, scheint aber in diesem Zusammenhang beachtenswert:

Die algebraischen Sorten von wachsender Ordnung sind ableitungsfest. Hat $f(x)$ eine solche Sorte, so auch jede noch so hohe Ableitung, nämlich die Sorte 0.

Die Vermutung, jeder Nevanlinnasche Ausnahmewert sei asymptotischer Wert, legt es nahe, nun auch die asymptotischen Werte selbst auf Ableitungsfestigkeit zu un-

tersuchen [8]). Nicht immer ist ein asymptotischer Wert ableitungsfest, wie das Beispiel Iversens

$$f(x) = \frac{\sin x^2}{x} \qquad f'(x) = 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$$

zeigt; während nämlich $f(x)$ längs der reellen Achse gegen 0 strebt, bleibt $f'(x)$ unbestimmt und schwankt zwischen zwei endlichen Grenzen. Wir werden aber im nächsten Paragraphen eine überaus einfache hinreichende Bedingung für die Ableitungsfestigkeit eines asymptotischen Werts aufstellen können.

13. Ableitungsfestigkeit asymptotischer Werte. Wir stützen uns auf die einfachsten Tatsachen über Normalfamilien und erinnern kurz an das nötige. $\mathfrak{G}$ sei ein Gebiet; wir sagen, eine Eigenschaft bestehe *in* $\mathfrak{G}$, wenn sie in jedem Punkt von $\mathfrak{G}$, *innerhalb* $\mathfrak{G}$, wenn sie auf jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{G}$ besteht. Konvergenzaussagen verstehen wir auf der Riemannschen Kugel. Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Funktionen $g(u)$ sei in $\mathfrak{G}$ eindeutig und analytisch.

Definition: $\mathfrak{M}$ heißt *Normalfamilie in* $\mathfrak{G}$, wenn sich aus jeder beliebigen Teilmenge $\mathfrak{M}_1 \in \mathfrak{M}$ stets eine Funktionenfolge auswählen läßt, die *innerhalb* $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergiert. (Hierfür das Zeichen $\Rightarrow$).

Kriterium: Sind alle Funktionen $g(u)$ von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{G}$ von drei Werten a, b, c verschieden, so ist $\mathfrak{M}$ Normalfamilie in $\mathfrak{G}$.

Satz [9]: *Die Funktionen von* $\mathfrak{M}$ *seien innerhalb* $\mathfrak{G}$ *gleichmäßig beschränkt; nach dem Kriterium ist daher* $\mathfrak{M}$ *Normalfamilie in* $\mathfrak{G}$. *Dann ist auch die Familie* $\mathfrak{M}'$ *der Ableitungen* $g'(u)$ *innerhalb* $\mathfrak{G}$ *gleichmäßig beschränkt, daher Normalfamilie, und es gilt mit*

$$g_\nu(u) \Rightarrow G(u) \quad \textit{stets} \quad g'(u) \Rightarrow G'(u). \tag{19}$$

Sei $x = c(t)$ Parameterdarstellung einer stetigen Kurve $\mathfrak{c}$ ohne Selbstüberschneidungen, die in der Gaußschen Ebene den Ursprung mit den Punkt ∞ verbindet: t reell $0 \leqq t < \infty$, und $c(0) = 0$, $c(t) \to \infty$ mit $t \to \infty$. Ich erkläre eine *Streifenumgebung* $\mathfrak{S}_\varepsilon$ von $\mathfrak{c}$ durch

$$|x - c(t)| < \varepsilon \qquad 0 \leqq t < \infty. \tag{20}$$

Unter diesen Festsetzungen gilt der

Satz 8: *Die meromorphe Funktion* $f(x)$ *strebe längs der Kurve* $\mathfrak{c}$ *gegen den endlichen asymptotischen Wert* ω. *Für ein passendes* $\varepsilon > 0$ *lasse* $f(x)$ *im Streifen* $\mathfrak{S}_\varepsilon$ *drei Werte* a, b, c *aus.*

Dann konvergiert $f(x)$ *auf jedem Teilstreifen* $\mathfrak{S}_{\varepsilon'}$, $\varepsilon' < \varepsilon$, *gleichmäßig gegen* ω *und alle Ableitungen* $f'(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$ *gleichmäßig gegen den asymptotischen Wert* 0. *Der asymptotische Wert ist also ableitungsfest.*

Zum Beweise ordnen wir der Funktion $f(x)$ die Funktionenfamilie $\mathfrak{M}_t$ zu, deren Elemente

$$g_t(u) = f(c(t) + \varepsilon u) \qquad 0 \leqq t < \infty \tag{21}$$

durch festen Parameter t gekennzeichnet sind.

Alle Funktionen $g_t(u)$ sind im Einheitskreis $\mathfrak{E}$ der u-Ebene eindeutig, analytisch und von a, b, c verschieden. $\mathfrak{M}_t$ ist daher eine Normalfamilie in $\mathfrak{E}$.

---

[8]) Diese Frage ist schon von Boutroux 1908 aufgeworfen, der sie völlig zu beantworten glaubte, was aber Iversen [6, S. 13] als irrig erkannte. In einer Diskussionsbemerkung zu meinem Prager Vortrag (1929) teilte Hr. Hoheisel mit, er sei im Besitze von Sätzen in dieser Richtung. Satz 8 ist im Anschluß daran entstanden, aber viel schärfer als die Hoheiselschen Sätze. Indes hat auch Shimizu zwei Sätze verwandten Inhalts veröffentlicht [10].

[9]) Der Satz ist fast trivial. In dieser Form hat ihn Carathéodory angegeben: Stetige Konvergenz und normale Funktionenfamilien. Math. Ann. **101** (1929), S. 530.

Ich zeige zuerst: Die Grenzfunktion jeder Folge $g_{t_\nu}(u)$ mit $t_\nu \to \infty$ ist identisch gleich der Konstanten ω. Betrachten wir den Kreis $|u| = r < 1$ und für ein bestimmtes t_ν sein Bild in der x-Ebene (nach 20); es wird von der Kurve $\mathfrak{c}$ in wenigstens zwei Punkten geschnitten, und es sei $x(t_\nu)$ etwa der Schnittpunkt von größtem Parameterwert auf $\mathfrak{c}$. Diesem Punkt entspricht nach $x(t_\nu) = c(t_\nu) + \varepsilon u$ ein wohlbestimmter Punkt u_ν des Kreises $|u| = r$. Für alle ν sind das abzählbar viele Punkte auf diesem Kreise, die mindestens einen Häufungspunkt $h(r)$ haben müssen. Weil $f(x)$ längs $\mathfrak{c}$ gegen ω strebt, strebt auch $g_{t_\nu}(u_\nu) \to \omega$, wenn $u_\nu \to h(r)$, so daß die Grenzfunktion $G(u)$ im Punkte $h(r)$ gleich ω sein muß.

Gleiches gilt aber für jedes beliebige $r < 1$, so daß $G(u) = \omega$ in kontinuierlich vielen Punkten, und damit identisch besteht.

Ich zeige zweitens, daß $g_t(u)$ *gleichmäßig* auf $|u| \leqq r < 1$ gegen ω strebt, wenn t durch die ganze reelle Achse gegen ∞ rückt. Sonst gäbe es nämlich nach Wahl eines positiven δ zu jedem n ein $t_n > n$ und ein u_n aus dem bezeichneten Kreise, so daß

$$|g_{t_n}(u_n) - \omega| > \delta \tag{22}$$

bleibt. Diese spezielle Funktionenfolge zu den Parametern t_n ist Teilmenge einer Normalfamilie und gestattet daher definitionsgemäß die Auswahl einer gleichmäßig auf $|u| \leqq r$ konvergenten Teilfolge, die nach dem ersten Beweisschritt gegen ω konvergiert. Dies führt zum Widerspruch mit der Konstruktion der $g_{t_n}(u)$ nach Formel (22).

Der letzte Teil der Behauptung folgt dann unmittelbar aus dem oben aufgeführten Satze über Normalfamilien: Die Grenzfunktion $\mathfrak{G}(u)$ ist identisch gleich der Konstanten ω, so daß die $g_t(u)$ innerhalb $\mathfrak{E}$ für genügend große t, etwa $t > T$, beschränkt sind. Daher sind auch die Familien $g'_t(u)$ usw. innerhalb $\mathfrak{E}$ beschränkt, also normal, und haben die gleichmäßige Grenzfunktion $G'(u) \equiv 0$, w. z. b. w.

Man sieht sofort, daß an Stelle des genannten Kriteriums (drei Ausnahmewerte) auch irgendein beliebiges andres Normalfamilienkriterium im Wortlaut des Satzes benutzt werden könnte, natürlich in einer Formulierung als Eigenschaft der Funktion $f(x)$, welche die Familie erzeugt.

Man könnte den Satz 8 auch umgekehrt fassen: *Strebt eine meromorphe Funktion $f(x)$ längs einer Kurve $\mathfrak{c}$ gegen einen endlichen asymptotischen Wert ω, ohne daß ihre sämtlichen Ableitungen ebenda gegen 0 streben, so nimmt $f(x)$ in jeder noch so schmalen Streifenumgebung $\mathfrak{S}_\varepsilon$ von $\mathfrak{c}$ schon alle Werte unendlich oft an bis auf höchstens zwei (Picardsche) Ausnahmewerte.* Im Zusammenhang mit einer Untersuchung Valirons sei erwähnt, daß ein solches $\mathfrak{c}$ ohne ableitungsfesten asymptotischen Wert Juliakurve ist [14, S. 125].

14. Transzendente Sorten. Ausblick. Asymptotische Werte entsprechen nach dem Satze von Hurwitz-Iversen den transzendenten Sorten. Da sie hinsichtlich der Ableitungsfestigkeit in zwei Arten zerfallen, wird man nun auch die transzendenten Sorten zu untersuchen haben. Nach Iversen gibt es zwei wesentlich verschiedene Arten von isolierten transzendenten Sorten:

a) bei dem Stanzverfahren des § 2 fällt wenigstens ein unendlich vielblättriges Flächenstück über $|z - p| < \varepsilon$ aus, welches nur endlich viele Punkte der Koordinate p enthält.

Eine solche Sorte p der Riemannschen Fläche nennen wir mit Iversen *direkt kritisch.* Ein Beispiel bietet die Fläche des Logarithmus.

b) Es fallen nur Stücke aus, wo alle Blätter über p schlicht oder algebraisch verzweigt sind, wo also die Umkehrfunktion stets geradlinig bis über p hin fortgesetzt werden kann; dann heiße die Sorte p *indirekt kritisch.* Die Transzendenz entsteht durch Häufung von Verzweigungsstellen.

Nevanlinnasche Ausnahmewerte sind ableitungsfest, es gibt ihrer höchstens abzählbar viele. Sie dürften daher den *direkt kritischen Sorten* entsprechen, deren es auch nur abzählbar viele geben kann, und die offenbar auch ableitungsfest sind. Einer solchen Sorte entsprechen auch ableitungsfeste asymptotische Werte.

Indirekt kritische Sorten sind hinsichtlich der Ableitungsfestigkeit unzuverlässig; man kann leicht Beispiele angeben, wo $f'(x)$ überhaupt keine transzendente Sorte hat, während $f(x)$ indirekt kritische transzendente Sorten aufweist. Hierher gehören alle nicht ableitungsfesten asymptotischen Werte.

Welche Bedeutung haben nun die Valironschen Ausnahmewerte? Erstens kann es ihrer kontinuierlich viele geben [7, S. 82], anderseits sind sie ableitungsfest. Ihre Definition mit Hilfe der Schmiegungsfunktion $m(r, z)$, nämlich

$$\Delta(z) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m(r, z)}{T(r, f)}, \tag{23}$$

läßt auch viel weniger erwarten, daß hier ein asymptotischer Wert, also eine transzendente Sorte vorliegt, als dies bei den Nevanlinnaschen Ausnahmewerten der Fall ist, wo der Limes inferior in (23) zu setzen ist.

Die Mächtigkeit der Menge aller *Valironschen Ausnahmewerte* und die Tatsache ihrer Ableitungsfestigkeit scheinen uns vielmehr darauf hinzuweisen, daß hier *algebraische Sorten wachsender Ordnung* zugrunde liegen könnten, denen genau dieselben Eigenschaften zukommen.

Literaturverzeichnis.

1. Bloch, A., La conception actuelle de la théorie des fonctions entières et méromorphes. Enseignement math. 1926.
2. Cartan, H., Sur les valeurs exceptionelles d'une fonction méromorphe dans tout le plan. CR **190** (1930), 1003.
3. Collingwood, E. F., Sur les valeurs exceptionelles des fonctions entières d'ordre fini. CR **179** (1924), S. 1125.
4. Groß, W., Über die Singularitäten analytischer Funktionen. Monatshefte f. Math. **29** (1918), S. 3—47.
5. — —, Eine ganze Funktion, für die jede komplexe Zahl Konvergenzwert ist. Math. Annalen **79** (1919), S. 201.
6. Iversen, F., Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes. Thèse, Helsingfors 1914.
7. Nevanlinna, R., Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Paris 1929.
8. — —, Über die Werteverteilung der eindeutigen analytischen Funktionen. Hamb. Abh. **8** (1931), S. 376 ff.
9. Ostrowski, Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes. Math. Zeitschrift **24** (1925), S. 246.
10. Shimizu, T., On the Paths of Determination and Indetermination of Integral Functions. Proc. Phys.-Math. Soc. of Japan, (3) **12** (1930), S. 127.
11. Speiser, A., Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen. Comm. Helv. **1** (1929), 289—312.
12. Ullrich, E., Über die Ableitung einer meromorphen Funktion. Sitzber. preuß. Akad. d. Wissenschaften, Math. Phys. Kl., 1929, S. 592—608.
13. Valiron, G., Sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes. Acta math. **47** (1926), S. 117—142.
14. — —, Le théorème de M. Picard et le complément de M. Julia. Journal Liouville (9) **7** (1928), S. 113.

Eingegangen 2. Februar 1932.

Vandermondesche Determinanten, Partialbruchzerlegung, Interpolationsaufgabe von Lagrange-Hermite.

Von *Julius Wellstein* in Karlsruhe.

Im folgenden sei eine einfache einheitliche Methode mitgeteilt, die neben der Partialbruchzerlegung zugleich die Lösung der Interpolationsaufgabe von Lagrange-Hermite liefert, den naturgemäßen Zusammenhang zwischen diesen Gegenständen hervortreten läßt und dabei nur elementare Umformungen verallgemeinerter Vandermondescher Determinanten verwendet. Der Kürze und bequemeren Übersichtlichkeit halber sei das Verfahren an einem nicht zu speziell gewählten Beispiel durchgeführt; seine Anwendbarkeit auf den allgemeinen Fall wird dann ohne weiteres ersichtlich und daher eine ausführliche Darstellung wohl überflüssig sein.

1. Soll das Polynom $\omega(\xi)$ von höchstens dem 5. Grade den 6 Bedingungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\omega(\alpha_1) = u_{01}, \quad \omega'(\alpha_1) = 1!\,u_{11}, \quad \omega''(\alpha_1) = 2!\,u_{21}; \quad \omega(\alpha_2) = u_{02}, \\ &\omega'(\alpha_2) = 1!\,u_{12}; \quad \omega(\alpha_3) = u_{03}; \quad (\alpha_2 - \alpha_1)\,(\alpha_3 - \alpha_1)\,(\alpha_3 - \alpha_2) \neq 0 \end{aligned}$$

genügen (Hermitesche Verallgemeinerung der Lagrangeschen Interpolationsaufgabe[1]), so muß notwendig folgende Identität

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \xi & \alpha_1 & 1 & 0 & \alpha_2 & 1 & \alpha_3 \\ \xi^2 & \alpha_1^2 & 2\alpha_1 & 1 & \alpha_2^2 & 2\alpha_2 & \alpha_3^2 \\ \xi^3 & \alpha_1^3 & 3\alpha_1^2 & 3\alpha_1 & \alpha_2^3 & 3\alpha_2^2 & \alpha_3^3 \\ \xi^4 & \alpha_1^4 & 4\alpha_1^3 & 6\alpha_1^2 & \alpha_2^4 & 4\alpha_2^3 & \alpha_3^4 \\ \xi^5 & \alpha_1^5 & 5\alpha_1^4 & 10\alpha_1^3 & \alpha_2^5 & 5\alpha_2^4 & \alpha_3^5 \\ \omega(\xi) & u_{01} & u_{11} & u_{21} & u_{02} & u_{12} & u_{03} \end{vmatrix} \equiv 0$$

bestehen[2]). Falls die zu $\omega(\xi)$ gehörende Unterdeterminante von Null verschieden ist,

[1]) „Sur la formule d'interpolation de Lagrange" J. f. d. reine u. angew. Math. **84** (1878), p. 70 ff. Eine rein algebraische Lösung ist in einem Aufsatze von Stickelberger (Math. Annalen **30** (1887), § 2) enthalten; vgl. den Zusatz von J. Drach in der französ. Encyklop. I_9 (Netto—le Vavasseur), Nr. 28. Weitere explizite Darstellungen der Hermiteschen Aufgabe scheinen nicht bekannt zu sein; Markoff gibt in seiner „Differenzenrechnung" (Leipzig 1896) ohne nähere Begründung nur eine Anweisung zur sukzessiven Berechnung der Entwicklungskoeffizienten eines Ansatzes, der als eine Verallgemeinerung der Newtonschen Interpolationsformel für den Fall zusammengerückter Interpolationsstellen gelten kann.

[2]) G. Zemplén („Étude sur l'interpolation et la décomposition des fonctions rationelles en fractions partielles", Archiv d. Math. u. Phys. (3) **8** (1905), S. 214—226) hat, von dieser Identität ausgehend, einen anderen, sehr mühsamen Weg zur Lösung eingeschlagen; seine Resultate sind nicht richtig. Vgl. E. Ziemke „Bemerkungen zu einer Interpolationsformel des Herrn Zemplén", dieselbe Zs. (3) **14** (1909), S. 187—189.

definiert (2) eindeutig das den Bedingungen (1) genügende Polynom $\omega(\xi)$. Dies führt zur Untersuchung der folgenden verallgemeinerten

2. Determinante von Vandermonde.

$$(3) \qquad V_{(321)} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \alpha_2 & 1 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & 2\alpha_1 & 1 & \alpha_2^2 & 2\alpha_2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & 3\alpha_1^2 & 3\alpha_1 & \alpha_2^3 & 3\alpha_2^2 & \alpha_3^3 \\ \alpha_1^4 & 4\alpha_1^3 & 6\alpha_1^2 & \alpha_2^4 & 4\alpha_2^3 & \alpha_3^4 \\ \alpha_1^5 & 5\alpha_1^4 & 10\alpha_1^3 & \alpha_2^5 & 5\alpha_2^4 & \alpha_3^5 \end{vmatrix}.$$

Die Zeiger bei V geben das Bildungsgesetz der Determinante an; sie ist von der Ordnung $3 + 2 + 1 = 6$ und enthält soviel „Sätze" von Spalten wie Zeiger vorhanden sind, in jedem Satze folgen auf seine erste Spalte deren Ableitungen, durch geeignete Zahlfaktoren dividiert, der Zeiger gibt die Spaltenanzahl des Satzes an; tritt nur ein (von Null verschiedener) Zeiger auf, so hat die Determinante den Wert 1. Man verstehe unter ξ eine Variable und unter Δ_6 die Determinante

$$(4) \qquad \Delta_6 \equiv \begin{vmatrix} \xi & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

ferner unter $\varphi(\xi)$ das Polynom

$$(5) \qquad \varphi(\xi) \equiv (\xi - \alpha_1)^3(\xi - \alpha_2)^2(\xi - \alpha_3) \equiv \xi^6 + j_1\xi^5 + j_2\xi^4 + j_3\xi^3 + j_4\xi^2 + j_5\xi + j_6.$$

Die Determinante $V_{(321)}$ forme man nun in folgender Weise um: Man multipliziere die Zeilen von Δ_6 mit den Spalten von $V_{(321)}$ und bilde so die Produktdeterminante $\Delta_6 \cdot V_{(321)} = V_{(321)}$. In dem Produkte dividiere man die 1. Spalte durch $\xi - \alpha_1$, addiere das Resultat zur 2. Spalte, dividiere alsdann die 2. Spalte durch $\xi - \alpha_1$, addiere sie nunmehr zur 3. Spalte und dividiere diese nun durch $\xi - \alpha_1$; in analoger Weise behandle man weiter den zweiten und dritten Satz von Spalten. Dann folgt, falls $\varphi(\xi) \neq 0$, die Identität:

$$(6) \qquad \frac{V_{(321)}}{\varphi(\xi)} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \alpha_2 & 1 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & 2\alpha_1 & 1 & \alpha_2^2 & 2\alpha_2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & 3\alpha_1^2 & 3\alpha_1 & \alpha_2^3 & 3\alpha_2^2 & \alpha_3^3 \\ \alpha_1^4 & 4\alpha_1^3 & 6\alpha_1^2 & \alpha_2^4 & 4\alpha_2^3 & \alpha_3^4 \\ \dfrac{1}{\xi - \alpha_1} & \dfrac{1}{(\xi - \alpha_1)^2} & \dfrac{1}{(\xi - \alpha_1)^3} & \dfrac{1}{\xi - \alpha_2} & \dfrac{1}{(\xi - \alpha_2)^2} & \dfrac{1}{\xi - \alpha_3} \end{vmatrix}.$$

Ist dagegen ξ eine Wurzel des Polynoms, etwa $\xi = \alpha_1$, so versagt das beschriebene Verfahren bei dem ersten Satze von Spalten, während es sich bei den folgenden unverändert anwenden läßt, und es folgt unmittelbar:

$$(7) \qquad V_{(321)} = (\alpha_2 - \alpha_1)^2(\alpha_3 - \alpha_1)\, V_{(221)},$$

wo nun

$$(8)\qquad V_{(221)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & 1 & \alpha_2 & 1 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & 2\alpha_1 & \alpha_2^2 & 2\alpha_2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & 3\alpha_1^2 & \alpha_2^3 & 3\alpha_2^2 & \alpha_3^3 \\ \alpha_1^4 & 4\alpha_1^3 & \alpha_2^4 & 4\alpha_2^3 & \alpha_3^4 \end{vmatrix}$$

gesetzt ist. Diese rekurrente Beziehung (7) gestattet nun die Berechnung von $V_{(321)}$. Es gelten nämlich die in analoger Weise herzuleitenden Relationen:

$$V_{(221)} = (\alpha_2 - \alpha_1)^2(\alpha_3 - \alpha_1)\, V_{(121)}, \qquad V_{(121)} = (\alpha_2 - \alpha_1)^2(\alpha_3 - \alpha_1)\, V_{(021)},$$
$$V_{(021)} = (\alpha_3 - \alpha_2)\, V_{(011)}, \qquad V_{(011)} = (\alpha_3 - \alpha_2)\, V_{(001)} = (\alpha_3 - \alpha_2),$$

woraus sich

$$(9)\qquad V_{(321)} = (\alpha_2 - \alpha_1)^{2\cdot 3}\,(\alpha_3 - \alpha_1)^{1\cdot 3}\,(\alpha_3 - \alpha_2)^{1\cdot 2} \neq 0$$

ergibt [3]).

3. Interpolation.

Nunmehr folgt aus (2):

$$(10)\quad \omega(\xi) \equiv -\frac{1}{V_{(321)}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \xi & \alpha_1 & 1 & 0 & \alpha_2 & 1 & \alpha_3 \\ \xi^2 & \alpha_1^2 & 2\alpha_1 & 1 & \alpha_2^2 & 2\alpha_2 & \alpha_3^2 \\ \xi^3 & \alpha_1^3 & 3\alpha_1^2 & 3\alpha_1 & \alpha_2^3 & 3\alpha_2^2 & \alpha_3^3 \\ \xi^4 & \alpha_1^4 & 4\alpha_1^3 & 6\alpha_1^2 & \alpha_2^4 & 4\alpha_2^3 & \alpha_3^4 \\ \xi^5 & \alpha_1^5 & 5\alpha_1^4 & 10\alpha_1^3 & \alpha_2^5 & 5\alpha_2^4 & \alpha_3^5 \\ 0 & u_{01} & u_{11} & u_{21} & u_{02} & u_{12} & u_{03} \end{vmatrix}.$$

Bildet man mit der Determinante 6. Grades

$$(11)\qquad \Delta \equiv \begin{vmatrix} \xi & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & -1 \\ j_6 & j_5 & j_4 & j_3 & j_2 & j_1 + \xi \end{vmatrix} = \varphi(\xi)$$

die geränderte Determinante 7. Grades

$$(12)\qquad \left|\begin{array}{ccc:c} & & & 0 \\ & \Delta & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right| = \varphi(\xi)$$

und multipliziert deren Zeilen mit den Spalten der Determinante in (10), so kann man die Produktdeterminante in gleicher Weise wie in Nr. 2 umformen und erhält schließlich die Identität:

---

[3]) Eine verwandte Determinante ist bei Markoff, Differenzenrechnung, S. 167—168, ausgewertet; das eben beschriebene Rekursionsverfahren führt auch da rascher zum Ziel.

$$(13)\qquad \frac{\omega(\xi)}{\varphi(\xi)} \equiv \frac{1}{V_{(321)}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \alpha_2 & 1 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & 2\alpha_1 & 1 & \alpha_2^2 & 2\alpha_2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & 3\alpha_1^2 & 3\alpha_1 & \alpha_2^3 & 3\alpha_2^2 & \alpha_3^3 \\ \alpha_1^4 & 4\alpha_1^3 & 6\alpha_1^2 & \alpha_2^4 & 4\alpha_2^3 & \alpha_3^4 \\ \dfrac{\vartheta_{01}(\xi)}{\xi-\alpha_1} & \dfrac{\vartheta_{11}(\xi)}{(\xi-\alpha_1)^2} & \dfrac{\vartheta_{21}(\xi)}{(\xi-\alpha_1)^3} & \dfrac{\vartheta_{02}(\xi)}{\xi-\alpha_2} & \dfrac{\vartheta_{12}(\xi)}{(\xi-\alpha_2)^2} & \dfrac{\vartheta_{03}(\xi)}{\xi-\alpha_3} \end{vmatrix},$$

falls man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} &\vartheta_{01}(\xi) = u_{01}, \quad \vartheta_{11}(\xi) = u_{01} + (\xi-\alpha_1)u_{11}, \quad \vartheta_{21}(\xi) = u_{01} + (\xi-\alpha_1)u_{11} + (\xi-\alpha_1)^2 u_{21}, \\ (14)\quad &\vartheta_{02}(\xi) = u_{02}, \quad \vartheta_{12}(\xi) = u_{02} + (\xi-\alpha_2)u_{12}, \\ &\vartheta_{03}(\xi) = u_{03} \end{aligned}$$

setzt. Hiermit hat man die Lösung der Interpolationsaufgabe[4]) (1) und kommt im Falle $u_{01} = u_{02} = u_{03} = 1$, $u_{11} = u_{21} = u_{12} = 0$ auf die Formel (6) zurück (mit $\omega(\xi) \equiv 1$). Die Entwicklungen von (6) und (13) nach der letzten Zeile haben dieselben Koeffizienten, hiermit ist der enge Zusammenhang zwischen Interpolation und Partialbruchzerlegung nachgewiesen.

4. Partialbruchzerlegung.

Die Entwicklung der Determinante (6) liefert die Partialbruchzerlegung:

$$(15)\qquad \frac{1}{\varphi(\xi)} = \frac{A_{11}}{\xi-\alpha_1} + \frac{A_{21}}{(\xi-\alpha_1)^2} + \frac{A_{31}}{(\xi-\alpha_1)^3} + \frac{A_{12}}{\xi-\alpha_2} + \frac{A_{22}}{(\xi-\alpha_2)^2} + \frac{A_{13}}{\xi-\alpha_3}.$$

Die Koeffizienten lassen sich aber auf einfachere Determinanten zurückführen: Setzt man

$$(16)\qquad \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-\alpha_1)^3} \equiv \varphi_1(\xi), \qquad \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-\alpha_2)^2} \equiv \varphi_2(\xi), \qquad \frac{\varphi(\xi)}{\xi-\alpha_3} \equiv \varphi_3(\xi),$$

so ergeben sich aus (15) die bekannten Darstellungen der Koeffizienten durch Differentialquotienten; z. B. ist

$$(17)\qquad A_{31} = \frac{1}{\varphi_1(\alpha_1)}, \qquad A_{21} = \frac{1}{1!}\left[\frac{d\,\dfrac{1}{\varphi_1(\xi)}}{d\xi}\right]_{\xi=\alpha_1}, \qquad A_{31} = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2\,\dfrac{1}{\varphi_1(\xi)}}{d\xi^2}\right]_{\xi=\alpha_1}.$$

Nun gilt aber analog zu (6) die Identität:

$$(18)\qquad \frac{1}{\varphi_1(\xi)} = \frac{1}{(\alpha_3-\alpha_2)^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & \alpha_3 \\ \dfrac{1}{\xi-\alpha_2} & \dfrac{1}{(\xi-\alpha_2)^2} & \dfrac{1}{\xi-\alpha_3} \end{vmatrix},$$

in der sich die Ableitungen der linken Seite nach ξ unmittelbar an der Determinante rechts bilden lassen; damit sind die Koeffizienten A selbst als Determinantenquotienten darstellbar, was gegenüber (17) in manchen Fällen eine Erleichterung der Rechnung bringen mag.

Jetzt folgt aus (13) die Partialbruchentwicklung

$$(19)\qquad \frac{\omega(\xi)}{\varphi(\xi)} = \frac{B_{11}}{\xi-\alpha_1} + \frac{B_{21}}{(\xi-\alpha_1)^2} + \frac{B_{31}}{(\xi-\alpha_1)^3} + \frac{B_{12}}{\xi-\alpha_2} + \frac{B_{22}}{(\xi-\alpha_2)^2} + \frac{B_{13}}{\xi-\alpha_3},$$

[4]) Die Lagrangesche Interpolationsformel hat schon Baltzer, Theorie u. Anwendung der Determinanten, Leipzig 1875, S. 88, 89 aus der Vandermondeschen Determinante hergeleitet; jedoch läßt sich sein Verfahren nicht auf den allgemeineren Fall übertragen.

falls

$$(20)\quad \begin{array}{lll} B_{11} = u_{01}A_{11} + u_{11}A_{21} + u_{21}A_{31}, & B_{21} = u_{01}A_{21} + u_{11}A_{31}, & B_{31} = u_{01}A_{31}; \\ B_{12} = u_{01}A_{12} + u_{12}A_{22}, & B_{22} = u_{02}A_{22}; & B_{13} = u_{03}A_{13} \end{array}$$

gesetzt wird. Sie gilt für jede echt gebrochene rationale Funktion; die Unabhängigkeit dieser Entwicklung von der Methode der Herleitung muß in der üblichen Weise gezeigt werden.

Setzt man in (20) die Werte u aus den Formeln (1) ein, so folgt mit Rücksicht auf (17) die bekannte Darstellung der Koeffizienten B, also z. B.:

$$(21)\quad B_{31} = \left\{\frac{\omega(\xi)}{\varphi(\xi)}\right\}_{\xi=\alpha_1}, \qquad B_{21} = \frac{1}{1!}\left\{\frac{d}{d\xi}\frac{\omega(\xi)}{\varphi(\xi)}\right\}_{\xi=\alpha_1}, \qquad B_{11} = \frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{\omega(\xi)}{\varphi(\xi)}\right\}_{\xi=\alpha_1}.$$

5. Nochmals Vandermondesche Determinanten.

Die Koeffizienten A der Formel (15) sind die — durch $V_{(321)}$ dividierten — algebraischen Adjunkten der letzten Zeile von $V_{(321)}$. Man wird nun auch für die algebraischen Adjunkten der anderen Zeilen, also z. B. der 5., eine ähnliche Darstellung suchen. Zu diesem Zwecke ersetze man in $V_{(321)}$ die 5. Zeile durch die folgende $\frac{1}{\xi-\alpha_1}, \frac{1}{(\xi-\alpha_1)^2}, \frac{1}{(\xi-\alpha_1)^3}, \frac{1}{\xi-\alpha_2}, \frac{1}{(\xi-\alpha_2)^2}, \frac{1}{\xi-\alpha_3}$, und nenne die so erklärte Determinante $P^{(5)}_{(321)}(\xi)$; gleichzeitig ersetze man in Δ (vgl. (11)) die 5. Zeile durch 1, 0, 0, 0, 0, 0 und nenne die Determinante $\Delta^{(5)}(\xi)$, also

$$(22)\quad \Delta^{(5)}(\xi) = \begin{vmatrix} \xi & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ j_6 & j_5 & j_4 & j_3 & j_2 & j_1+\xi \end{vmatrix} = \xi + j_1 .$$

Bildet man nun das Produkt $\Delta^{(5)}(\xi)\, V_{(321)}$, so ergibt das Verfahren von Nr. 2 die Identität:

$$(23)\qquad \frac{\xi + j_1}{\varphi(\xi)} \equiv \frac{P^{(5)}_{(321)}(\xi)}{V_{(321)}} .$$

Hieraus folgt aber, daß die — durch $V_{(321)}$ dividierten — algebraischen Adjunkten der 5. Zeile von $V_{(321)}$ die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung von $\frac{\xi + j_1}{\varphi(\xi)}$ sind, und für die 4. bis 1. Zeile hat man analog die Funktionen

$$\frac{\xi^2 + j_1\xi + j_2}{\varphi(\xi)}, \quad \frac{\xi^3 + j_1\xi^2 + j_2\xi + j_3}{\varphi(\xi)}, \quad \frac{\xi^4 + j_1\xi^3 + j_2\xi^2 + j_3\xi + j_4}{\varphi(\xi)}, \quad \frac{\xi^5 + j_1\xi^4 + j_2\xi^3 + j_3\xi^2 + j_4\xi + j_5}{\varphi(\xi)}$$

zu entwickeln.

Somit erweisen sich alle Elemente der zu $V_{(321)}$ reziproken Matrix als Koeffizienten der Partialbruchentwicklung gewisser, leicht anzugebender rationaler Funktionen.

6. Eulersche Formeln.

Multipliziert man die Unterdeterminanten der letzten Zeile von $V_{(321)}$ mit den Elementen der $(h+1)$-ten Zeile und addiert, so erhält man die Identitäten

$$(24)\qquad \alpha_1^h A_{11} + \binom{h}{1}\alpha_1^{h-1}A_{21} + \binom{h}{2}\alpha_1^{h-2}A_{31} + \alpha_2^h A_{12} + \binom{h}{1}\alpha_2^{h-1}A_{22} + \alpha_3^h A_{13} = \begin{matrix}0\\1\end{matrix}$$

$$\text{für } h = \begin{matrix}0, 1, \ldots, 4\\5\end{matrix}.$$

Hat das Polynom $\Phi(\xi)$ höchstens den Grad 4, so folgt hieraus

$$(25)\qquad A_{11}\Phi(\alpha_1) + A_{21}\frac{\Phi'(\alpha_1)}{1!} + A_{31}\frac{\Phi''(\alpha_1)}{2!} + A_{12}\Phi(\alpha_2) + A_{22}\frac{\Phi'(\alpha_2)}{1} + A_{13}\Phi(\alpha_3) = 0,$$

und hier liegt eine Erweiterung der Eulerschen Formeln[5]) vor, auf die man im Falle einfacher Wurzeln des Polynoms $\varphi(\xi)$ zurückkommt.

---

[5]) Vgl. etwa Pascal, Repertorium 2. Aufl. I_1, S. 263, 264.

Karlsruhe, im Juli 1931.

Eingegangen 3. August 1931.

Über die algebraische Struktur von Schiefkörpern.

Von *Richard Brauer* in Königsberg i. Pr.

Das Ziel der folgenden Untersuchungen ist in der Hauptsache, eine Übersicht über die in einem gegebenen Schiefkörper [1]) A enthaltenen Schiefkörper zu erhalten. Als Grundkörper wird dabei das als vollkommener Körper vorausgesetzte Zentrum von A gewählt und A von endlichem Rang über diesem Zentrum angenommen. Es handelt sich also um eine genaue Analogie zur Fragestellung der Galoisschen Theorie im kommutativen Fall.

Ich beginne im § 1 damit, einen bereits früher [2]) von mir bewiesenen Satz noch einmal in durchsichtigerer Weise herzuleiten. Dieser Satz gestattet, die Existenz gewisser Teilschiefkörper sofort zu erkennen. Dabei zeigt sich, daß sich Schiefkörper in bezug auf ihr Zentrum als Grundkörper in gewisser Hinsicht einfacher verhalten als im allgemeinen gewöhnliche Körper von endlichem Grad über einem Grundkörper; man hat etwa eine Analogie zu Abelschen Körpern.

Jedem in einem gegebenen Schiefkörper A enthaltenen Teilschiefkörper, der seinerseits das Zentrum von A enthält, kann man entsprechend den Betrachtungen im kommutativen Fall eine Untergruppe der Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von A zu ordnen. Frl. E. Noether hat gezeigt, daß zu verschiedenen Teilschiefkörpern immer verschiedene Untergruppen von $\mathfrak{G}$ gehören; sie hat weiter die Bedingungen hergeleitet, denen eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ genügen muß, damit sie zu einem Teilschiefkörper gehört. Ich setze im § 2 diese Untersuchungen weiter fort und zwar unter Übertragung auf einfache Systeme, die sich im folgenden als zweckmäßig erweist.

Als Spezialfall ergeben sich aus diesen Betrachtungen im § 3 zunächst einige bereits bekannte Sätze. Weiter wird die Aufgabe, alle Teilschiefkörper eines gegebenen Schiefkörpers A aufzustellen, auf die beiden Fragen zurückgeführt: 1) Alle (kommutativen) Teilkörper von A, die das Zentrum enthalten, anzugeben; 2) Alle Darstellungen eines gegebenen Schiefkörpers A als direktes Produkt zweier Schiefkörper mit demselben Zentrum wie A anzugeben. Die erste Fragestellung kann man in gewissem Sinne als beantwortet betrachten, da man Gleichungen, durch deren Wurzeln die fraglichen Körper erzeugt werden, mit Hilfe von Parametern aufstellen kann. Die zweite Frage ist teilweise durch die Ergebnisse von § 1 gelöst.

Zum Schluß zeige ich noch, daß man durch Anwendung der Sätze von § 2 auf ein geeignetes einfaches System den Satz von der eineindeutigen Zuordnung der Teil-

[1]) Unter Schiefkörpern werden nullteilerfreie Systeme hyperkomplexer Zahlen verstanden.

[2]) Vgl. R. Brauer, Über Systeme hyperkomplexer Zahlen, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 79. Diese Arbeit wird im folgenden mit H. zitiert. Eine Skizze des in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Beweises findet sich im Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung **38** (1929), S. 47 (kursiv).

körper eines Normalkörpers zu den Untergruppen der Galoisschen Gruppe im kommutativen Fall erhalten kann. Das erscheint insofern nicht uninteressant, als die Sätze im nichtkommutativen Fall von ganz anderer Art sind wie in der Galoisschen Theorie.

Es sollen noch einige Sätze über die Darstellungen von Systemen hyperkomplexer Größen ohne Beweis zusammengestellt werden, die später verwendet werden [3]).

Der Grundkörper K wird im folgenden stillschweigend als vollkommen vorausgesetzt. Ein System hyperkomplexer Zahlen A über K ist dann und nur dann halbeinfach, wenn es eine einstufig isomorphe, in K rationale Darstellung besitzt, die absolut vollständig reduzibel ist; es ist dann jede in K rationale Darstellung vollständig reduzibel. Ist speziell A einfach, so ist die in K irreduzible Darstellung $\mathfrak{A}$ bis auf Ähnlichkeitstransformation eindeutig bestimmt. Alle absolut irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{A}$ kommen in $\mathfrak{A}$ gleich oft, etwa q-mal vor und besitzen denselben Grad f; gibt es insgesamt r solche wesentlich verschiedene Bestandteile, so ist das Zentrum von A ein algebraischer Körper r-ten Grades über K, der Rang von A über K ist genau rf^2. Ist $r = 1$, d. h. ist K selbst das Zentrum, so versteht man unter einem Zerfällungskörper einen algebraischen Körper endlichen Grades über K, in dem $\mathfrak{A}$ vollständig in absolut irreduzible Bestandteile zerfällt. Es gibt dann eine ganze positive Zahl m, den Index von A in bezug auf K, derart daß der Grad jedes Zerfällungskörpers in bezug auf K durch m teilbar ist und es Zerfällungskörper genau vom Grade m gibt. Die in K irreduzible Darstellung von A enthält ihren absolut irreduziblen Bestandteil genau m-mal. A ist isomorph zu einer vollständigen Matrixalgebra aus einem Schiefkörper, dessen Rang über K gerade m^2 ist.

Von der mit H zitierten Arbeit werden übrigens im folgenden außer den angeführten Tatsachen nur die Sätze 8 und 9 verwendet.

§ 1.

Ist A ein einfaches System hyperkomplexer Größen über dem Grundkörper K, so ist A nach dem Wedderburnschen Satz zur Gesamtheit aller Matrizen eines wohlbestimmten Grades r mit Koeffizienten aus einem Schiefkörper Σ isomorph. Σ ist (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt, es wird im folgenden als der *zu* A *gehörige Schiefkörper* bezeichnet. A und Σ haben dasselbe Zentrum. Das aus allen Matrizen vom Grade r mit Koeffizienten aus Σ bestehende System bezeichnen wir immer mit Σ_r [4]); es ist $\Sigma_r = \Sigma \times K_r$, wo also K_r aus allen in K rationalen Matrizen des Grades r besteht.

K sei ein gegebener vollkommener Körper; wir betrachten die Gesamtheit aller Schiefkörper mit dem Zentrum K von endlichem Rang über K. Sind A und B zwei derartige Schiefkörper, so ist das direkte Produkt $A \times B$ [5]) ein einfaches System hyperkomplexer Größen mit dem Zentrum K; es sei Ω der zugehörige Schiefkörper. Dann ist also $A \times B$ dem System Ω_r aller Matrizen eines festen Grades r mit Koeffizienten aus Ω isomorph.

Aus

$$A \times B \cong \Omega_r \cong \Omega \times K_r$$

folgt dann

$$A_s \times B_t \cong (A \times K_s) \times (B \times K_t) \cong A \times B \times K_s \times K_t \cong \Omega \times K_r \times K_s \times K_t ,$$

---

[3]) Wegen der Beweise vgl. etwa H. — Unter einer Darstellung eines Systems ist immer eine Darstellung durch Matrizen zu verstehen.

[4]) Ebenso ist die Bezeichnung in analogen Fällen.

[5]) Diese Produktbildung bezieht sich selbstverständlich auf K als Grundkörper. Die Einfachheit von $A \times B$ kann man direkt zeigen; einen kurzen Beweis mit Hilfe der Darstellungstheorie siehe H, § 5.

$$\mathsf{A}_s \times \mathsf{B}_t \cong \Omega \times \mathsf{K}_{rst},$$

d. h. auch $\mathsf{A}_s \times \mathsf{B}_t$ gehört zu Ω als Schiefkörper. Direkte Multiplikation von irgendeinem zu A gehörigen mit irgendeinem zu B gehörigen einfachen System ergibt immer ein zu demselben Schiefkörper Ω gehöriges einfaches System. Wir wollen diese Verknüpfungsoperation, die je zwei Schiefkörpern A und B mit dem Zentrum K einen dritten ebensolchen Schiefkörper Ω zuordnet, als *formale Multiplikation* von A und B bezeichnen; wir setzen

$$\Omega = \mathsf{A} \circ \mathsf{B}.$$

Ω ist bis auf Isomorphie eindeutig durch A und B bestimmt.

Da $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$ und $\mathsf{B} \times \mathsf{A}$ isomorph sind, folgt

$$\mathsf{A} \circ \mathsf{B} = \mathsf{B} \circ \mathsf{A}.$$

Die formale Multiplikation ist ferner assoziativ. Ist nämlich Γ ein dritter Schiefkörper mit dem Zentrum K, so gehört, da $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$ ein zu $\mathsf{A} \circ \mathsf{B}$ gehöriges einfaches System ist, das einfache System $(\mathsf{A} \times \mathsf{B}) \times \Gamma$ zu $(\mathsf{A} \circ \mathsf{B}) \circ \Gamma$. Ebenso gehört $\mathsf{A} \times (\mathsf{B} \times \Gamma)$ zu $\mathsf{A} \circ (\mathsf{B} \circ \Gamma)$. Wegen der Gültigkeit des assoziativen Gesetzes für direkte Produkte folgt

$$(\mathsf{A} \circ \mathsf{B}) \circ \Gamma = \mathsf{A} \circ (\mathsf{B} \circ \Gamma).$$

Aus $\mathsf{A} \times \mathsf{K} = \mathsf{A}$ folgt

$$\mathsf{A} \circ \mathsf{K} = \mathsf{A},$$

der Grundkörper K spielt bei der formalen Multiplikation die Rolle des Einheitselementes. Ist ferner A' das zu A reziprok isomorphe System, so ist der zu $\mathsf{A} \times \mathsf{A}'$ gehörige Schiefkörper gerade der Schiefkörper K[6]), daher ergibt sich

$$\mathsf{A} \circ \mathsf{A}' = \mathsf{K}.$$

Es gibt also bei der formalen Multiplikation zu jedem Schiefkörper einen inversen. Daraus ergibt sich

Satz 1: *Die Gesamtheit der Schiefkörper mit dem Zentrum* K, *die von endlichem Rang über* K *sind, bildet bei Verwendung der formalen Multiplikation als Verknüpfungsoperation eine Abelsche Gruppe (isomorphe Schiefkörper sind dabei als identisch anzusehen). Das Inverse eines Schiefkörpers ist das reziprok isomorphe System.*

Ferner gilt

Satz 2: *Jedes Element in der Abelschen Gruppe der Schiefkörper hat eine endliche Ordnung* l. l *ist dabei ein Teiler des Index* m *von* A, *der durch alle Primteiler von* m *teilbar ist.*

Satz 2 folgt unmittelbar aus H,[1] Satz 9[6a]). Die Zahl l bezeichnen wir als *Exponenten* von A[7]).

Satz 3[8]): *Der Index einer jeden „formalen Potenz"* $\mathsf{A} \circ \mathsf{A} \circ \cdots \circ \mathsf{A}$ *von* A *ist ein Teiler des Index von* A.

Beweis: Besitzt A den Index m, so bedeutet das, daß A in einem Körper m-ten Grades über K eine absolut irreduzible Darstellung besitzt. Das gleiche gilt dann auch für alle Produkte $\mathsf{A} \times \mathsf{A} \times \cdots \times \mathsf{A}$ und folglich auch für den zugehörigen Schiefkörper $\mathsf{A} \circ \mathsf{A} \circ \cdots \circ \mathsf{A}$; der Index ist hier also ein Teiler von m.

---

[6]) Vgl. H, Satz 8.

[6a]) Zusatz bei der Korrektur: Neuerdings hat Herr A. A. Albert (Trans. of the Am. Math. Soc. **33** (1931), S. 708, Theorem 29) einen neuen die Darstellungstheorie vermeidenden Beweis dieses Satzes gegeben und daraus den mit H, Satz 10 identischen Satz 4 der vorliegenden Arbeit auf anderem Wege bewiesen.

[7]) Die natürlichere Bezeichnung „Ordnung von A" könnte leicht zu Verwechslungen Anlaß geben.

[8]) Man kann auch noch beweisen, daß, wenn A den Index m besitzt, der Index der k-ten formalen Potenz von A ein Teiler von $\frac{m}{(m,k)}$ ist. Im Fall $l = m$ ist $\frac{m}{(m,k)}$ der genaue Index der k-ten Potenz von A.

Es sei A ein Schiefkörper vom Rang $m^2 > 1$ über seinem Zentrum K;

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}, \qquad (\alpha_\varrho > 0)$$

sei die Primfaktorzerlegung des Index m. Der Exponent l von A hat dann nach Satz 2 die Form

$$l = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}, \qquad (0 < \beta_\varrho \leqq \alpha_\varrho).$$

In jeder Gruppe läßt sich ein Element A von endlicher Ordnung l als Produkt von Elementen darstellen, deren Ordnungen gerade die verschiedenen in l aufgehenden Primzahlpotenzen sind, und die ihrerseits Potenzen von A sind. Durch Anwendung auf die Gruppe der Schiefkörper und das Element A folgt

$$\mathsf{A} = \Omega_1 \circ \Omega_2 \circ \cdots \circ \Omega_r. \tag{1}$$

Dabei bedeutet Ω_ϱ einen Schiefkörper mit dem Zentrum K, dessen Exponent $p_\varrho^{\beta_\varrho}$ ist; im Sinn der formalen Multiplikation von Schiefkörpern ist Ω_ϱ eine Potenz von A. Nach Satz 3 ist also der Index m_ϱ von Ω_ϱ ein Teiler von m. Da aber andererseits nach Satz 2 (auf Ω_ϱ angewendet) m_ϱ eine Potenz von p_ϱ ist, folgt

$$m_\varrho = p_\varrho^{\gamma_\varrho}, \qquad (\gamma_\varrho \leqq \alpha_\varrho).$$

Bildet man nun

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_r,$$

so besitzt dieses System über K den Rang

$$(p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_r^{\gamma_r})^2 \leqq m^2, \tag{2}$$

andererseits ist es wegen (1) dem System aller Matrizen von einem Grad t mit Koeffizienten aus A isomorph und hat daher den Rang $t^2 m^2$. Es muß also notwendig $t = 1$ sein und in (2) das Gleichheitszeichen stehen. Daraus folgt

$$\gamma_\varrho = \alpha_\varrho,$$
$$\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_r \cong \mathsf{A}.$$

Satz 4: *Besitzt der Schiefkörper A den Rang m^2 über seinem Zentrum und ist*

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r},$$

so kann man A als direktes Produkt

$$\mathsf{A} \cong \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_r \tag{3}$$

darstellen, wo Ω_ϱ ein Schiefkörper mit dem Zentrum K vom Rang $(p_\varrho^{\alpha_\varrho})^2$ über K ist.

Aus dem Beweis ergibt sich auch noch, daß Ω_ϱ durch (3) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

Die Gruppe der Schiefkörper ist mit der Gruppe der Faktorensysteme isomorph [9]). Daraus folgt noch, daß, wenn Z ein algebraischer Erweiterungskörper endlichen Grades über K ist, diejenigen Schiefkörper, die in Z eine absolut irreduzible Darstellung besitzen, eine Untergruppe der Gruppe aller Schiefkörper bilden [10]).

§ 2.

A sei ein Schiefkörper mit dem Zentrum K vom Rang m^2 über K. Als *Teilschiefkörper* von A bezeichnen wir diejenigen in A enthaltenen Schiefkörper B, die ihrerseits K enthalten.

---

[9]) Vgl. R. Brauer, Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen I Math. Zeitschrift **28** (1928), S. 677—696, § 3.

[10]) Herr G. Köthe hat neuerdings untersucht, wie weit man diese Betrachtungen auf Schiefkörper von unendlichem Rang übertragen kann; vgl. G. Köthe, Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum, Math. Ann. **105** (1931), S. 15—39.

Ist B ein Teilschiefkörper von A, so bildet offenbar auch die Gesamtheit Γ der mit allen Elementen von B vertauschbaren Elemente von A einen Teilschiefkörper von A, da, wenn α_1 und α_2 zu Γ gehören, offenbar auch $\alpha_1 \pm \alpha_2$, $\alpha_1 \alpha_2$, und falls $\alpha_2 \neq 0$ ist, auch α_2^{-1} zu Γ gehört. Frl. Noether hat gezeigt:

Satz 5: *Die Beziehung zwischen* B *und* Γ *ist eine gegenseitige, d. h. ist* Γ *die Gesamtheit der mit* B *elementweise vertauschbaren Größen von* A, *so ist* B *umgekehrt gerade die Gesamtheit der mit* Γ *elementweise vertauschbaren Elemente von* A [11]).

Satz 5 soll in allgemeinerer Form bewiesen werden:

Satz 6: *Ist* A *ein einfaches System hyperkomplexer Größen mit dem Zentrum* K, B *ein einfaches Teilsystem von* A (*das das Zentrum* K *von* A *enthält*), *so bildet die Gesamtheit der mit* B *elementweise vertauschbaren Größen von* A *ein einfaches System* Γ, *das dasselbe Zentrum wie* B *besitzt. Sind a, b, c die Rangzahlen von* A, B, Γ *über* K, *so gilt*

$$a = b \cdot c. \tag{4}$$

Die Gesamtheit der mit allen Größen aus Γ *vertauschbaren Elemente von* A *ist dann umgekehrt gerade* B.

Wir bezeichnen Γ als das *mit* B *vertauschbare Teilsystem von* A.

Beweis: 1. Γ enthält jedenfalls das Zentrum Z von B. Da ferner alle Elemente von Γ mit allen Elementen von Z vertauschbar sind (denn dies sind spezielle Elemente aus B), muß sogar das Zentrum von Γ das Zentrum von B enthalten. Nimmt man für alle einfachen Teilsysteme B eines einfachen Systems A als bewiesen an, daß das zugehörige System Γ einfach ist und daß (4) gilt, so folgen auch die übrigen Aussagen von Satz 6. Wendet man nämlich die als bekannt geltenden Behauptungen auf Γ an, so folgt, daß die elementweise mit Γ vertauschbaren Größen von A ein System Δ vom Rang $\frac{a}{c} = b$ über K bilden. Δ muß B enthalten; da beide den gleichen Rang haben, müssen sie gleich sein. Ferner muß das Zentrum von $\Delta = B$ das Zentrum von Γ enthalten; da auch das Umgekehrte der Fall war, haben B und Γ dasselbe Zentrum.

2. Wir behandeln jetzt zunächst den Spezialfall, daß A das System K_t aller Matrizen eines festen Grades t mit Koeffizienten aus K ist; dann ist

$$a = t^2. \tag{5}$$

B erscheint von selbst als eine in K rationale Gruppe von Matrizen des Grades t.

Das Zentrum von B ist ein algebraischer Körper etwa vom Grade r über K [12]). B besitzt dann r wesentlich verschiedene absolut irreduzible Bestandteile $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_r$ [13]), die alle den gleichen Grad f besitzen und alle in B gleich oft, etwa q-mal vorkommen. Durch Gradvergleichung folgt

$$t = rqf. \tag{6}$$

---

[11]) Vergl. eine demnächst in der Math. Zeitschr. erscheinende Arbeit von Frl. Noether. — Ich verdanke die Kenntnis von Satz 5 einer freundlichen mündlichen Mitteilung von Frl. Noether und einer von G. Köthe herrührenden Ausarbeitung einer Noetherschen Vorlesung aus dem Sommersemester 1928. Es handelt sich um die „Galoissche Theorie für Schiefkörper" von Frl. Noether. Als Galoissche Gruppe von A in bezug auf K als Grundkörper hat man die Gruppe aller Automorphismen von A zu bezeichnen, bei denen die Elemente von K festbleiben. Da nur innere Automorphismen existieren (vgl. Satz 8), so ist das die Faktorgruppe der multiplikativen Gruppe von A durch die multiplikative Gruppe von K. Zu jedem Teilschiefkörper B von A gehört eine Untergruppe der Galoisschen Gruppe, die aus denjenigen Automorphismen besteht, die B elementweise festlassen. Offenbar handelt es sich dabei um die Faktorgruppe der multiplikativen Gruppe von Γ durch die multiplikative Gruppe von K. Satz 5 zeigt dann, zu welchen Untergruppen der Galoisschen Gruppe Teilschiefkörper gehören, ferner daß zu verschiedenen Teilschiefkörpern verschiedene Untergruppen gehören.

[12]) Vgl. zum folgenden die in der Einleitung zusammengestellten Sätze.

[13]) Das Nullsystem kann nicht auftreten, weil B das Zentrum von A enthalten soll.

Andererseits ergibt sich für den Rang b von B

$$b = rf^2. \tag{7}$$

Da B ein einfaches System ist, ist es als Gruppe von Matrizen vollständig reduzibel; in einem geeigneten Erweiterungskörper K^* ist es also zu

$$\mathsf{B}^* = \begin{pmatrix} E_q \times \mathfrak{B}_1 & & & \\ & E_q \times \mathfrak{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_q \times \mathfrak{B}_r \end{pmatrix}$$ [14])

ähnlich. Die in K^* rationalen, mit allen Elementen von B^* vertauschbaren Matrizen haben wegen der Form von B^* die Form [15])

$$C^* = \begin{pmatrix} C_1 \times E_f & & & \\ & C_2 \times E_f & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_r \times E_f \end{pmatrix}, \tag{8}$$

wo $C_1, C_2, \ldots, C_r$ ganz beliebige, in K^* rationale Matrizen des Grades q sind. Es gibt daher genau rq^2 linear unabhängige Matrizen C^*. Folglich gibt es auch genau rq^2 linear unabhängige in K^* rationale Matrizen, die mit der ähnlichen Gruppe B elementweise vertauschbar sind. Da aber die Bestimmung aller dieser Matrizen nur von der Auflösung linearer Gleichungen mit Koeffizienten aus K abhängt, so gibt es unter den in K rationalen mit B elementweise vertauschbaren Matrizen genau rq^2 linear unabhängige. Alle diese Matrizen sind aber Elemente von A, sie bilden gerade das oben mit Γ bezeichnete Teilsystem. Für den Rang ergibt sich also

$$c = rq^2. \tag{9}$$

Aus (5), (6), (7) und (9) folgt

$$bc = r^2 q^2 f^2 = t^2 = a,$$

daher ist in dem hier behandelten Spezialfall die Behauptung (4) richtig.

Die feste Ähnlichkeitstransformation, die B in B^* überführt, transformiert Γ in eine Gruppe Γ^*, die aus lauter Matrizen C^* der Form (8) besteht. Nun enthält Γ^* ebenso wie Γ genau soviel linear unabhängige Matrizen, wie es überhaupt linear unabhängige Matrizen der Form C^* gibt. Läßt man also C^* alle Elemente von Γ^* durchlaufen, so muß für jedes $\varrho = 1, 2, \ldots, r$ in (8) C_ϱ die Matrizen einer absolut irreduziblen Gruppe $\mathfrak{C}_\varrho$ des Grades q durchlaufen, da im Fall der Reduzibilität von $\mathfrak{C}_\varrho$ die Gruppe Γ^* nicht $c = rq^2$ linear unabhängige Elemente enthalten könnte. Analog folgt, daß die Bestandteile $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_r$ von Γ^* alle wesentlich verschieden sind. Das zeigt, daß Γ^* eine vollständig reduzible Gruppe ist, die als absolut irreduzible Bestandteile $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_r$ und zwar jeden f-mal besitzt. Das Gleiche gilt für die ähnliche Gruppe Γ. Wegen der vollständigen Reduzibilität ist dann Γ halbeinfach.

Weiter folgt aber, daß Γ einfach ist. Im anderen Fall wäre nämlich Γ direkte Summe von einfachen Systemen, deren Zentren kleineren Grad als r über K hätten, da ja Γ nur r wesentlich verschiedene absolut irreduzible Bestandteile besitzt. Unter 1.

---

[14]) Unter E_q verstehen wir die Einheitsmatrix des Grades q. Sind A und B zwei Matrizen, so bedeutet $A \times B$ die Kroneckersche Produkttransformation. Durchlaufen A und B Gruppen $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, so ist unter $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ die aus allen Matrizen $A \times B$ bestehende Gruppe gemeint. $E_q \times \mathfrak{B}$ ist also eine vollständig in q Bestandteile $\mathfrak{B}$ zerfallende Gruppe, $\mathfrak{B} \times E_q$ eine zu $E_q \times \mathfrak{B}$ ähnliche Gruppe.

[15]) Das ist eine einfache Folgerung aus einem grundlegenden Satz von Herrn I. Schur (Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1905, S. 406—432, Satz I).

war aber gezeigt, daß das Zentrum von Γ einen Körper Z vom Grade r über K enthält. Das ergibt einen Widerspruch.

Da jede Gruppe $\mathfrak{C}_\varrho$ in Γ genau f-mal vorkommt, ist der Schursche Index des einfachen Systems Γ ein Teiler von f.

3. Im allgemeinen Fall sei A' das zu A reziproke System;

$$\bar{A} = A \times A'$$

ist dann nach Satz 1 von der in 2. behandelten speziellen Form. Ferner setzen wir

$$\bar{B} = B \times K \text{ [16]}).$$

$\bar{B}$ ist ein zu B isomorphes Teilsystem von $\bar{A}$, das das Zentrum von $\bar{A}$ enthält. Die Rangzahlen $\bar{a}$ und $\bar{b}$ von $\bar{A}$ und $\bar{B}$ über K sind

$$\bar{a} = a^2, \qquad \bar{b} = b.$$

Auf $\bar{A}$ können wir die Resultate von 2. anwenden: Die Gesamtheit der mit allen Elementen von $\bar{B}$ vertauschbaren Elemente von $\bar{A}$ bildet ein einfaches Teilsystem $\bar{\Gamma}$ von $\bar{A}$ vom Rang

$$\bar{c} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{a^2}{b}. \tag{10}$$

Ist $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_a'$ eine Basis von A', so kann man jedes Element von $\bar{A}$ und erst recht also jedes Element $\bar{\gamma}$ von $\bar{\Gamma}$ eindeutig in der Form

$$\bar{\gamma} = \sigma_1 \alpha_1' + \sigma_2 \alpha_2' + \cdots + \sigma_a \alpha_a' \tag{11}$$

darstellen, wo $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_a$ Größen von A sind. Die Vertauschbarkeit von $\bar{\gamma}$ mit irgendeinem Element $\bar{\beta}$ von $\bar{B}$ liefert dann

$$\beta\sigma_1 \alpha_1' + \beta\sigma_2 \alpha_2' + \cdots + \beta\sigma_a \alpha_a' = \sigma_1 \alpha_1' \beta + \sigma_2 \alpha_2' \beta + \cdots + \sigma_a \alpha_a' \beta$$

für jedes β aus B, und da β als Element von A mit allen Elementen α_ν' von A' vertauschbar ist, folgt

$$(\beta\sigma_1 - \sigma_1 \beta) \alpha_1' + (\beta\sigma_2 - \sigma_2 \beta) \alpha_2' + \cdots + (\beta\sigma_a - \sigma_a \beta) \alpha_a' = 0.$$

In den Klammern stehen hier Elemente von A, also müssen alle Klammern Null sein. Da β in B beliebig war, folgt, daß alle σ_ν in (11) zu dem Teilsystem Γ von A gehören müssen, das aus allen mit B elementweise vertauschbaren Größen von A besteht. Gehören umgekehrt in (11) alle σ_ν zu Γ, so gehört offenbar $\bar{\gamma}$ zu $\bar{\Gamma}$. Daher gilt

$$\bar{\Gamma} = \Gamma \times A'. \tag{12}$$

Da nun nach 2. das System $\bar{\Gamma}$ einfach ist, muß auch Γ einfach sein; denn ein echtes invariantes Teilsystem von Γ liefert sofort ein ebensolches Teilsystem von $\bar{\Gamma}$; nilpotent ist Γ bestimmt nicht, weil sonst $\bar{\Gamma}$ nilpotent wäre. Für den Rang c von Γ ergibt sich aus (10) und (12)

$$c = \frac{\bar{c}}{a} = \frac{a}{b}.$$

Nach 1. ist damit alles bewiesen.

Aus der Schlußbemerkung von 2. folgt noch, daß der Index $\bar{\gamma}$ von $\bar{\Gamma}$ ein Teiler des Grades f der absolut irreduziblen Darstellungen von $\bar{B}$ ist, das ist dieselbe Gradzahl, die bei B auftritt.

---

[16]) Identifizieren wir, was erlaubt und zweckmäßig ist, das Teilsystem $A \times K$ von $\bar{A}$ mit A, so wird $\bar{B}$ mit B identisch.

Nehmen wir jetzt B als Körper an [17]), so ist $f = 1$, also auch $\bar{\gamma} = 1$. Da B sein eigenes Zentrum und also auch das des mit B vertauschbaren Teilsystems Γ von A ist, bedeutet dies, daß $\bar{\Gamma}$ zu einem vollständigen Matrizensystem B_t über B isomorph ist.

Ist Z irgendein Erweiterungskörper endlichen Grades von K, so bilden wir das direkte Produkt $\mathsf{A} \times \mathsf{Z}$ (in bezug auf K als Grundkörper). Wir bezeichnen es als die Erweiterung A_Z von A auf Z als Grundkörper [18]). Das Zentrum von A_Z ist zu Z isomorph; wir identifizieren es mit Z.

Wir setzen nun $\mathsf{Z} = \mathsf{B}$ und nehmen jetzt Z an Stelle von K als Grundkörper [19]). Γ und $\bar{\Gamma}$ enthalten ja Z als Zentrum, so daß wir sie als Systeme über Z auffassen können. Aus (12) folgt nun leicht wegen der oben abgeleiteten Struktur von $\bar{\Gamma}$.

$$\mathsf{Z}_t \cong \bar{\Gamma} \cong \Gamma \times \mathsf{A}'_\mathsf{Z} \text{ [20]}; \tag{13}$$

dabei ist natürlich auch bei der direkten Multiplikation Z als Grundkörper betrachtet. Aus (13) ergibt sich unmittelbar die (auch direkt leicht nachweisbare) Einfachheit von A'_Z. Aus § 1 folgt dann, daß Γ und A'_Z zu reziprok isomorphen Schiefkörpern gehören, also Γ und A_Z zum selben Schiefkörper gehören.

Γ ist offenbar das maximale Teilsystem von A mit dem Zentrum Z.

Satz 7: *Ist Z ein Teilkörper des einfachen Systems A, ist ferner Γ das maximale Teilsystem von A mit dem Zentrum Z, so gehören A_Z und Γ zum selben Schiefkörper. Ist speziell A Schiefkörper, so gehört A_Z zu Γ als Schiefkörper.*

Ist wieder B ein einfaches Teilsystem des einfachen Systems A und ist Γ das mit B vertauschbare Teilsystem von A, so besitzen nach Satz 6 B und Γ dasselbe Zentrum Z.

Wir bilden in bezug auf Z als Grundkörper das direkte Produkt

$$\mathsf{T} = \mathsf{B} \times \Gamma .$$

Da jedes Element des Teilsystems B von A mit jedem Element des Teilsystems Γ von A vertauschbar ist, gibt es ein zu T homomorphes System T_1 innerhalb A. Wegen der Einfachheit von T muß dann T sogar zu T_1 isomorph sein, wir können T direkt mit T_1 identifizieren.

T besitzt als Zentrum Z. Sind die Rangzahlen von A, B, Γ, Z in bezug auf K wieder bzw. mit a, b, c, r bezeichnet, so hat T in bezug auf Z den Rang

$$\frac{b}{r} \cdot \frac{c}{r} = \frac{a}{r^2} ,$$

in bezug auf K hat es also den Rang $\frac{a}{r}$. Da es also denselben Rang hat, den nach Satz 6 das maximale Teilsystem mit dem Zentrum Z besitzt, muß T mit diesem maximalen Teilsystem übereinstimmen.

Satz 8: *Ist B ein einfaches Teilsystem eines einfachen Systems A, ist Γ das mit B vertauschbare Teilsystem von A und ist Z das gemeinsame Zentrum von B und Γ, so ist das in bezug auf Z als Grundkörper gebildete Produkt $\mathsf{B} \times \Gamma$ gerade das maximale Teilsystem von A mit dem Zentrum Z.*

---

[17]) Unter Körpern werden im folgenden immer stillschweigend kommutative Körper verstanden (anders als in der ersten unter [23]) zitierten Arbeit).

[18]) Man erhält A_Z auch, indem man aus den a Basiselementen von A unter Beibehaltung ihrer Multiplikationsgesetze ein System hyperkomplexer Größen über Z bildet. — Die Voraussetzung über den Grad von Z ist überflüssig.

[19]) Dann ist übrigens in A_Z noch ein zweites zu Z isomorphes System enthalten.

[20]) Es ist $(\mathsf{A}')_\mathsf{Z} \sim (\mathsf{A}_\mathsf{Z})'$.

Ferner gilt

Satz 9: *Sind* B_1 *und* B_2 *zwei einfache Teilsysteme eines einfachen Systems* A, *und ist eine isomorphe Beziehung von* B_1 *auf* B_2 *gegeben, bei der der Grundkörper* K *elementweise in sich übergeht, so kann man diese Abbildung immer durch einen inneren Automorphismus von* A *realisieren* [21]). *Insbesondere besitzt* A *nur innere Automorphismen.*

Beweis: 1. Ist zunächst wieder A eine vollständige Matrixalgebra, so erscheinen B_1 und B_2 als Systeme von in K rationalen Matrizen. Denkt man sich diese Systeme in K in irreduzible Bestandteile zerlegt, so kann das Nullsystem nicht auftreten, weil B_1 und B_2 das Zentrum von A enthalten. Ferner besteht vollständige Reduzibilität. Da nun ein einfaches System über K in K nur eine einzige Darstellung besitzt, folgt Ähnlichkeit von B_1 und B_2, das ist in diesem Falle gerade die Behauptung.

2. Im allgemeinen Fall setzen wir

$$\bar{\mathsf{A}} = \mathsf{A} \times \mathsf{A}', \quad \mathsf{B}_1^* = \mathsf{B}_1 \times \mathsf{A}', \quad \mathsf{B}_2^* = \mathsf{B}_2 \times \mathsf{A}' .$$

Für $\bar{\mathsf{A}}$ ist unter 1. die Behauptung bewiesen. Ordnet man die Elemente von A' sich selbst zu, so entsteht aus der isomorphen Abbildung von B_1 auf B_2 eine isomorphe Abbildung von B_1^* auf B_2^*, man kann diese also durch einen inneren Automorphismus von $\bar{\mathsf{A}}$, etwa Transformation mit τ realisieren, wobei τ^{-1} existiert. Da τ und τ^{-1} mit allen Elementen von A' vertauschbar sind, müssen sie zu dem mit A' vertauschbaren System gehören, das ist aber A. Daher gehören τ und τ^{-1} zu A, woraus die Behauptung folgt.

§ 3.

Als Spezialfall von Satz 8 ergibt sich zunächst

Satz 10 [22]**):** *Besitzt das einfache System* A *ein einfaches Teilsystem* B, *dessen Zentrum der Grundkörper* K *ist, so läßt sich* A *als direktes Produkt* $\mathsf{B} \times \Gamma$ *von* B *mit einem anderen einfachen Teilsystem* Γ *von* A *darstellen.*

Ferner ergeben sich die folgenden Sätze, deren erster auch direkt leicht zu beweisen ist:

Satz 11: *Ist* Z *ein Teilkörper eines einfachen Systems* A *vom Rang* a, *so geht das Quadrat des Grades* r *von* Z *in* a *auf.*

Beweis: Hat das mit Z vertauschbare Teilsystem T von A den Rang c, so ist $a = rc$. Z ist das Zentrum von T und daher r ein Teiler von c.

Satz 12 [23]**):** *Ist* Z *ein maximaler Teilkörper des einfachen Systems* A, *so besitzt* A *eine in* Z *rationale absolut irreduzible Darstellung.*

Beweis: T sei das maximale Teilsystem von A mit dem Zentrum Z. Den zu T gehörigen Schiefkörper Σ kann man als Teilsystem von T auffassen, er besitzt auch Z als Zentrum. Wäre Σ umfassender als Z, so würde durch Adjunktion eines nicht in Z vorkommenden Elementes von Σ zu Z ein (kommutativer) Teilkörper Z^* von A entstehen, der Z als echten Teil enthält, was im Gegensatz zur Voraussetzung steht. Also ist $\mathsf{Z} = \Sigma$. Nach Satz 7 ist dann der zu A_Z gehörige Schiefkörper der Körper Z selbst, d. h. A_Z ist dem System Z_t aller in Z rationalen Matrizen vom Grade t isomorph; dabei ist t^2 der Rang a von A. Da A einem in A_Z enthaltenen System isomorph ist (wobei die Elemente

---

[21]) Man vergleiche dazu H, Hilfssatz 2 und Satz 11. — Für den Fall, daß A Schiefkörper ist, findet sich der Satz auch bei van der Waerden, Moderne Algebra II, Berlin 1931, S. 209.

[22]) Wedderburn, Transactions of the American Mathematical Society **22** (1921), S. 132.

[23]) R. Brauer und E. Noether, Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1927, S. 221—228; H, Satz 4 und 5.

von K sich selbst entsprechen), besitzt A eine in Z rationale Darstellung des Grades $t = \sqrt{a}$, die dann von selbst irreduzibel ist.

Satz 13 [23]**:** *Ist* A *ein einfaches System vom Rang a über seinem Zentrum* K *und ist* Z *ein Körper vom Grad* $r = \sqrt{a}$ [24]) *über* K, *in dem* A *eine absolut irreduzible Darstellung besitzt, so ist* Z *einem maximalen Teilkörper von* A *isomorph.*

Beweis: A besitzt nach Voraussetzung eine in Z rationale absolut irreduzible Darstellung, die dann den Grad $r = \sqrt{a}$ hat. A ist also einem Teilsystem von Z_r isomorph. Da nun Z eine in K rationale Darstellung vom Grad r hat, also einem Teilsystem von K_r isomorph ist, ist Z_r und damit auch A einem Teilsystem von K_a isomorph. Wir dürfen also annehmen

$$A < Z_r < K_a .$$

Wendet man Satz 6 auf die Teilsysteme von K_a an, so folgt, daß das mit Z_r vertauschbare System das Zentrum Z von Z_r enthält und den Rang $\frac{a^2}{r^3} = r$ hat, also mit Z identisch ist. Das mit A vertauschbare Teilsystem B von K_a enthält infolgedessen Z. Aus Satz 8 folgt

$$A \times B = K_a .$$

B gehört nach § 1 zum selben Schiefkörper wie A'. Da B und A' außerdem denselben Rang a haben, sind sie isomorph. Mit A' enthält aber auch A einen zu Z isomorphen Körper.

Beschränken wir uns jetzt der Einfachheit halber auf Schiefkörper A, so haben wir also, um alle Teilschiefkörper zu erhalten, folgendermaßen vorzugehen: Wir haben zunächst alle (kommutativen) Teilkörper Z von A aufzusuchen, das sind nach Satz 12 sämtliche Teilkörper der Zerfällungskörper, ihre Aufstellung ist eine der Hauptaufgaben in der „arithmetischen Theorie der Gruppen linearer Substitutionen"; man darf diese Körper als bekannt ansehen. Zu Z gehört ein maximaler Teilschiefkörper T mit diesem Zentrum. Nach Satz 7 kann man T auch folgendermaßen charakterisieren: Man bilde mit Hilfe der Basiselemente von A ein System hyperkomplexer Größen über dem Grundkörper Z, das entstehende einfache System A_Z gehört gerade zu T als Schiefkörper. Um jetzt alle Teilschiefkörper B von A mit dem Zentrum Z zu erhalten, hat man T in bezug auf Z als Grundkörper auf alle möglichen Weisen als direktes Produkt von Faktoren mit dem Zentrum Z zu schreiben, alle in Frage kommenden B treten dabei als Faktor auf. Zerlegt man den Rang von T in bezug auf Z in zwei teilerfremde Faktoren, so gehört nach Satz 4 dazu stets eine Zerlegung von T mit den betreffenden Rangzahlen, die auftretenden Faktoren sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. In dem Fall, daß man den Rang von T in zwei nicht teilerfremde Faktoren zerlegt hat, hängt es dagegen von der speziellen Natur von T ab, ob zu diesen Rangzahlen eine Zerlegung von T gehört oder nicht [25]).

Schließlich soll noch die in § 2 behandelte „Galoissche Theorie" der einfachen Systeme mit der gewöhnlichen Galoisschen Theorie in Verbindung gebracht werden.

K sei der als vollkommen vorausgesetzte Grundkörper, Z ein Normalkörper des Grades r über K. Die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von Z bestehe etwa aus $E = G_1, G_2, \ldots, G_r$.

---

[24]) Ersetzt man A durch ein anderes zum selben Schiefkörper gehöriges System (wobei die Zerfällungskörper dieselben bleiben), so kann man stets erreichen, daß diese Beziehung gilt.

[25]) Vgl. dazu R. Brauer, Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen II. Math. Zeitschrift **31** (1930), S. 733—747, § 5. G. Köthe, a. a. O. — Zusatz bei der Korrektur: Ist K ein algebraischer Körper, so folgt aus einem neuerdings von H. Hasse, E. Noether und dem Verfasser bewiesenen Satz, daß eine Zerlegung von T im zweiten Fall nicht existiert.

Dann soll gezeigt werden, daß man den Satz von der eineindeutigen Zuordnung der Teilkörper von Z zu den Untergruppen von $\mathfrak{G}$ durch Anwendung der Sätze des § 3 auf ein geeignetes einfaches System A erhalten kann. Zunächst sollen einige Eigenschaften eines speziellen Systems A hergeleitet werden.

Eine Basis von Z bestehe aus $z_1, z_2, \ldots, z_r$. Man mache die r^2 Elemente

$$z_\varrho G_\sigma, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r; \quad \sigma = 1, 2, \ldots, r)$$

zu der Basis eines hyperkomplexen Systems A über K durch die Festsetzung

$$(z_\varrho G_\sigma)(z_\tau G_\omega) = z_\varrho z_\tau^{G_\sigma^{-1}} G_\sigma G_\omega \text{ [26]}).$$

Man zeigt leicht, daß das assoziative Gesetz gilt.

Jedes Element von A kann man dann eindeutig in der Form schreiben

$$t = \zeta_1 G_1 + \zeta_2 G_2 + \cdots + \zeta_r G_r, \tag{14}$$

wo $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$ Größen von Z sind.

Hilfssatz: *Ist eine Teilmenge $\mathfrak{T}$ von A sowohl Z-Links- wie Rechtsmodul, so gibt es Elemente $G_\alpha, G_\beta, \ldots, G_\varkappa$ in $\mathfrak{G}$ derart, daß $\mathfrak{T}$ aus allen Elementen*

$$\zeta_\alpha G_\alpha + \zeta_\beta G_\beta + \cdots + \zeta_\varkappa G_\varkappa \tag{15}$$

besteht, wobei $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\varkappa$ beliebige Elemente aus Z sind.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß wenn bei der Darstellung (14) irgendeines Elementes t von $\mathfrak{T}$ ein Gruppenelement G_α mit von Null verschiedenem Koeffizienten vorkommt, auch G_α selbst in $\mathfrak{T}$ vorkommt. Zu dem Zweck betrachten wir ein G_α wirklich enthaltendes Element t von $\mathfrak{T}$, das insgesamt möglichst wenig Gruppenelemente wirklich enthält. Wir nehmen an, daß in t noch mindestens ein weiteres Gruppenelement G_ϱ wirklich vorkommt

$$t = \eta_\alpha G_\alpha + \eta_\varrho G_\varrho + \cdots \tag{16}$$

wo $\eta_\alpha, \eta_\varrho, \ldots$ Größen aus Z sind und $\eta_\alpha \neq 0$ ist.

Ist β ein zunächst beliebiges Element aus Z, so enthält $\mathfrak{T}$ auch

$$t' = \beta \cdot t - t \cdot \beta^{G_\varrho} = (\beta\,\eta_\alpha) G_\alpha + (\beta\,\eta_\varrho) G_\varrho + \cdots - \eta_\alpha G_\alpha \cdot \beta^{G_\varrho} - \eta_\varrho G_\varrho \cdot \beta^{G_\varrho} - \cdots.$$

$$= (\beta\,\eta_\alpha - \eta_\alpha \beta^{G_\varrho G_\alpha^{-1}}) G_\alpha + (\beta\,\eta_\varrho - \eta_\varrho \beta^{G_\varrho G_\varrho^{-1}}) G_\varrho + \cdots$$

$$t' = (\beta\,\eta_\alpha - \eta_\alpha \beta^{G_\varrho G_\alpha^{-1}}) G_\alpha + 0 \cdot G_\varrho + \cdots.$$

Da die Automorphismen G_ϱ und G_α von Z verschieden sind, kann man β so in Z wählen, daß

$$\beta \neq \beta^{G_\varrho G_\alpha^{-1}}$$

gilt. Daher ist der Koeffizient von G_α in t' von 0 verschieden. t' enthält nur Gruppenelemente wirklich, die auch in t vorkommen, G_ϱ aber ist weggefallen, und daher enthält t' im Gegensatz zur Annahme über t insgesamt weniger Gruppenelemente als t. Daher darf in (16) in t nur G_α wirklich vorkommen. Durch Multiplikation mit η_α^{-1} folgt, daß dann auch $G_\varkappa$ selbst in $\mathfrak{T}$ vorkommt, w. z. b. w.

Soll jetzt $\mathfrak{T}$ außerdem noch Teilsystem von A sein, so müssen offenbar die im Hilfssatz vorkommenden Gruppenelemente $G_\alpha, G_\beta, \ldots, G_\varkappa$ eine Untergruppe bilden. $\mathfrak{T}$ ist dann sicher einfach. Denn ein invariantes Teilsystem $\mathfrak{T}^*$ erfüllt die Voraussetzung des Hilfssatzes [27]) und enthält daher ein G_α, also alle in $\mathfrak{T}$ vorkommenden G_α und daher

---

[26]) Dabei bedeutet z^G für irgendein z aus Z und ein G aus $\mathfrak{G}$ das aus z durch Anwendung von G entstehende Element.

[27]) Mit $G_1 = 1$ gehört auch Z zu $\mathfrak{T}$.

$\mathfrak{T}$. (Das nilpotente Ausnahmesystem ist $\mathfrak{T}$ bestimmt nicht, da es ein Einheitselement enthält). Insbesondere ist A selbst einfach. Man schließt leicht, daß das Zentrum von A gerade K ist.

Auf A wenden wir jetzt die Sätze von § 3 an. Das mit Z vertauschbare Teilsystem von A sei T, es hat den Rang $\frac{r^2}{r} = r$. Da es Z als Zentrum besitzt, muß $\mathsf{T} = \mathsf{Z}$ sein.

Ist Ω ein beliebiger Teilkörper von Z, der den Grundkörper K enthält, so sei Γ das mit Ω vertauschbare Teilsystem von A. Da Ω in Z enthalten ist, muß Γ das mit Z vertauschbare Teilsystem, das ist aber Z selbst, enthalten. Daher ist Γ sowohl Z-Links- wie Rechtsmodul, also von der im Hilfssatz genannten Form. Die Elemente $G_\alpha, G_\beta, \ldots, G_\varkappa$ müssen dabei eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ bilden. $\mathfrak{H}$ ist dann genau die Gruppe derjenigen Automorphismen von $\mathfrak{G}$, die alle Elemente von Ω festlassen. Hat Ω den Grad s, so hat Γ nach Satz 6 den Rang $\frac{r^2}{s}$ und also $\mathfrak{H}$ die Ordnung $\frac{r^2}{s} : r = \frac{r}{s}$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{H}$ irgendeine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit den Elementen $G_\alpha, G_\beta, \ldots, G_\varkappa$, so bildet

$$\mathsf{Z}G_\alpha + \mathsf{Z}G_\beta + \cdots + \mathsf{Z}G_\varkappa$$

ein Teilsystem Γ von A. Wie oben gezeigt, ist Γ einfach. Da das Einheitselement von $\mathfrak{G}$ in Γ vorkommt, enthält Γ das System Z. Das mit Γ vertauschbare Teilsystem Ω muß daher in Z enthalten sein. Dann ist Ω Teilkörper von Z und gehört genau zur Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$. Damit ist die eineindeutige Zuordnung der Untergruppen von $\mathfrak{G}$ zu den Teilkörpern von Z bewiesen.

Sind ferner Ω_1 und Ω_2 zwei isomorph aufeinander bezogene Teilkörper von Z, so wird dieser Automorphismus durch ein Element von $\mathfrak{G}$ geliefert. Das folgt so: Jedenfalls gibt es nach Satz 9 ein festes $\alpha \neq 0$ in A, so daß für ein beliebiges Element ω_1 von Ω_1 und das zugehörige ω_2 in Ω_2 immer

$$\omega_1 \alpha = \alpha \omega_2 \tag{17}$$

gilt. Ist

$$\alpha = \zeta_\varrho G_\varrho + \zeta_\sigma G_\sigma + \cdots, \qquad \zeta_\varrho \neq 0, \tag{18}$$

so folgt durch Einsetzen von (18) in (17) und Vergleichen des Koeffizienten von G_ϱ

$$\omega_1 = \omega_2^{G_\varrho^{-1}},$$

woraus sich die Behauptung ergibt.

Aus dieser Bemerkung folgen die andern Haupteigenschaften der Zuordnung von Teilkörpern zu Untergruppen.

Eingegangen 1. November 1931.